

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2018/2019**

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1

CZERWIEC 2019

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Numer zadania	1	2	3	4
Odpowiedź	C	C	A	D

Klucz punktowania zadań kodowanych

Zad 5.

3	7	5
---	---	---

Zadanie 5. (0–2)

W urnie znajduje się 16 kul, które mogą się różnić wyłącznie kolorem. Wśród nich jest 10 kul białych i 6 kul czarnych. Z tej urny losujemy dwukrotnie jedną kulę bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych.

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

Rozwiązanie

Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwukrotnie kuli białej

$$p = \frac{10 \cdot 9}{16 \cdot 15} = \frac{90}{240} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Kodujemy cyfry: 3, 7, 5.

Schemat oceniania rozwiązania zadania z kodowaną odpowiedzią

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zakoduje cyfry: 3, 7, 5.

Zadanie 6. (0–3)

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Rozwiązanie

Zauważamy, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr:

- pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka;
lub
- cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka. Cyfrę 7 możemy zapisać na jednym z siedmiu miejsc, cyfrę 4 na jednym z sześciu miejsc, a pozostałe pięć miejsc wypełnią jedynki. Stosując regułę mnożenia otrzymujemy:

$$7 \cdot 6 \cdot 1 = 42$$

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka. Wybieramy najpierw miejsce dla cyfry 7, następnie dwa miejsca dla dwóch cyfr 2, a pozostałe miejsca wypełnią jedynki. Stosując kolejny raz regułę mnożenia otrzymujemy:

$$7 \cdot \binom{6}{2} \cdot 1 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$$

Teraz stosujemy regułę dodawania

$$42 + 105 = 147$$

Odpowiedź: Wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28, jest 147.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze jeden z dwóch przypadków:

- naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z zestawu cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka

albo

- naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z zestawu cyfr: cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zapisze oba przypadki, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka

oraz

gdy obliczy dla jednego z dwóch przypadków, ile jest liczb siedmiocyfrowych zbudowanych z cyfr:

- pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka: 42

albo

- cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka: 105.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy obliczy, że jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym, jest równy 28.

Zadanie 7. (0–2)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{25x^2 - 9}{x^2 + 2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Oblicz wartość $f'(10)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu 10.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji f . Pochodna ta jest określona wzorem:

$$f'(x) = \frac{118x}{(x^2 + 2)^2}, \text{ zatem } f'(10) = \frac{1180}{10404} = \frac{295}{2601} \approx 0,113417.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy wyznaczył pochodną funkcji f : $f'(x) = \frac{118x}{(x^2 + 2)^2}$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczył wartość wyznaczonej pochodnej dla argumentu $x = 10$:

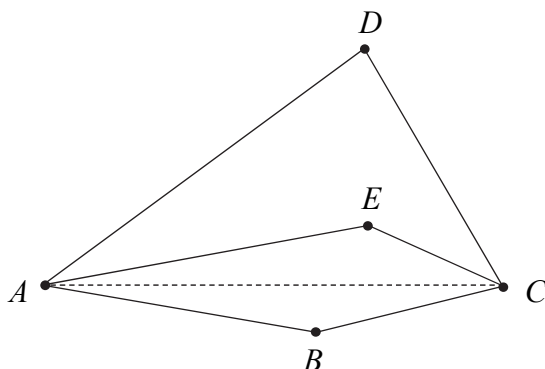
$$f'(10) = \frac{1180}{10404} = \frac{295}{2601} \approx 0,113417.$$

Uwaga

Jeżeli zdający błędnie obliczy pochodną funkcji, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**, z wyjątkiem przypadku popełnienia identyfikowalnego błędu rachunkowego, kiedy może otrzymać 1 punkt.

Zadanie 8. (0–3)

Dwusieczne kątów BAD i BCD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E , przy czym punkty B i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC (zobacz rysunek).



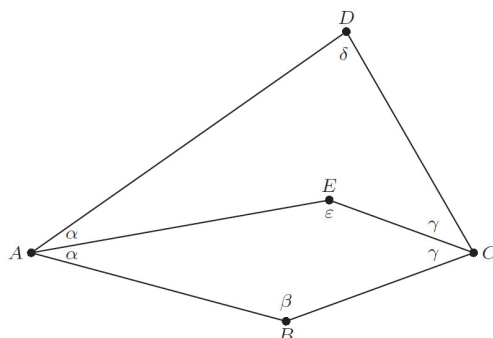
Wykaż, że $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2 \cdot |\sphericalangle AEC| = 360^\circ$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia:

$\alpha = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle DAE|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle DCE|$, $\delta = |\sphericalangle ADC|$, $\varepsilon = |\sphericalangle AEC|$, gdzie

ε jest kątem wypukłym, tzn. kątem wewnętrznym czworokąta $ABCE$.



Ponieważ suma kątów czworokąta jest równa 360° , więc:

z czworokąta $ABCE$ mamy równość $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ$,

z czworokąta $AECD$ mamy równość $\alpha + (360^\circ - \varepsilon) + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Po odjęciu tych równości stronami otrzymujemy:

$$\beta + \varepsilon - 360^\circ + \varepsilon - \delta = 0,$$

czyli

$$\beta - \delta + 2\varepsilon = 360^\circ.$$

To kończy dowód.

Ten sam dowód można zapisać wprost, bez przyjmowania dodatkowych oznaczeń.

Z czworokąta $ABCE$ dostajemy równość

$$|\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle AEC| = 360^\circ.$$

Z czworokąta $AECD$ dostajemy równość

$$|\sphericalangle EAD| + (360^\circ - |\sphericalangle AEC|) + |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle ADC| = 360^\circ.$$

Po odjęciu tych równości stronami i uwzględnieniu równości $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EAD|$ oraz

$|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle ECD|$, otrzymujemy równość

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle AEC| - 360^\circ + |\sphericalangle AEC| - |\sphericalangle ADC| = 0^\circ,$$

czyli

$$|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2 \cdot |\sphericalangle AEC| = 360^\circ.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 p.

- Zdający zapisze jedną z równości wynikające z sumy kątów czworokąta, tzn.
 $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ$ lub $\alpha + (360^\circ - \varepsilon) + \gamma + \delta = 360^\circ$

lub

- zdający zapisze jedną z równości: $|\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle AEC| = 360^\circ$ lub
 $|\sphericalangle EAD| + (360^\circ - |\sphericalangle AEC|) + |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle ADC| = 360^\circ.$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

- Zdający zapisze obie równości wynikające z sumy kątów czworokąta, tzn.
 $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ$ oraz $\alpha + (360^\circ - \varepsilon) + \gamma + \delta = 360^\circ$

lub

- zdający zapisze równości: $|\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle AEC| = 360^\circ$ oraz
 $|\sphericalangle EAD| + (360^\circ - |\sphericalangle AEC|) + |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle ADC| = 360^\circ.$

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający odejmie te równości stronami z uwzględnieniem równości $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EAD|$ oraz
 $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle ECD|.$

Zadanie 9. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.

Rozwiązanie (I sposób)

Przekształcamy wyrażenie równoważnie w następujący sposób

$$\begin{aligned} & n^5 - 3n^4 - n + 19, \\ & n^5 - 3n^4 - n + 3 + 16, \\ & n^4 \cdot (n - 3) - (n - 3) + 16, \\ & (n^4 - 1) \cdot (n - 3) + 16, \\ & (n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3) + 16, \\ & (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3) + 16 \end{aligned}$$

Z założenia liczba n jest nieparzysta, więc liczby: $(n - 1)$, $(n + 1)$, $(n^2 + 1)$, $(n - 3)$ są parzyste.

Oznacza to, że ich iloczyn jest podzielny przez 2^4 . Zatem wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest sumą dwóch składników podzielnych przez 16, a więc jest podzielne przez 16.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze wyrażenie w postaci: $(n^4 - 1) \cdot (n - 3) + 16$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $(n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3) + 16$ i nie uzasadni podzielności przez 16.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób)

Ponieważ liczba n jest nieparzysta możemy zapisać ją w postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ przyjmuje postać: $(2k + 1)^5 - 3(2k + 1)^4 - (2k + 1) + 19$.

Po przekształceniu wyrażenia równoważnie otrzymujemy

$$32k^5 + 32k^4 - 16k^3 - 32k^2 - 16k + 16.$$

Stąd wynika, że wyrażenie $32k^5 + 32k^4 - 16k^3 - 32k^2 - 16k + 16$ możemy zapisać w postaci iloczynu $16 \cdot (2k^5 + 2k^4 - k^3 - 2k^2 - k + 1)$, który jako iloczyn liczby 16 oraz całkowitej liczby $(2k^5 + 2k^4 - k^3 - 2k^2 - k + 1)$ jest podzielny przez 16.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze wraz z odpowiednimi założeniami wyrażenie $(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 19$ i przekształci poprawnie przynajmniej jedno z wyrażeń.

$$(2k+1)^5 = 32k^5 + 80k^4 + 80k^3 + 40k^2 + 10k + 1 \text{ lub}$$

$$(2k+1)^4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 1.$$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy doprowadzi wyrażenie do postaci $32k^5 + 32k^4 - 16k^3 - 32k^2 - 16k + 16$ i nie uzasadni, że to wyrażenie jest podzielne przez 16.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 10. (0–4)

Miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego jest o 2° mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n+2)$ -kąta foremnego. Oblicz n .

Rozwiązanie

Suma miar kątów wewnętrznych n -kąta foremnego jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$, więc miara

jednego kąta wewnętrznego tego n -kąta jest równa $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

Tak samo wyznaczamy miarę kąta wewnętrznego $(n+2)$ -kąta foremnego.

Jest ona równa $\frac{n \cdot 180^\circ}{n+2}$.

Stąd i z treści zadania otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned}\frac{n \cdot 180^\circ}{n+2} &= \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} + 2^\circ, \\ \frac{90n}{n+2} &= \frac{90(n-2)}{n} + 1, \\ 90n^2 &= 90(n-2)(n+2) + n(n+2), \\ 90n^2 &= 90n^2 - 360 + n^2 + 2n, \\ n^2 + 2n + 1 - 361 &= 0, \\ (n+1)^2 - 19^2 &= 0, \\ (n+1-19)(n+1+19) &= 0, \\ (n-18)(n+20) &= 0, \\ n &= 18 \text{ lub } n = -20.\end{aligned}$$

Liczba n jest naturalna, więc $n = 18$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze wyrazi miarę kąta wewnętrznego n -kąta lub $(n+2)$ -kąta foremnego w zależności

od n : np. $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, $\frac{n \cdot 180^\circ}{n+2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zapisze równanie z niewiadomą n , wynikające z porównania miar kątów wewnętrznych

wielokątów: $\frac{n \cdot 180^\circ}{n+2} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} + 2^\circ$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy zapisze równanie kwadratowe z niewiadomą n w postaci: $an^2 + bn + c = 0$, np.:

$$n^2 + 2n - 360 = 0$$

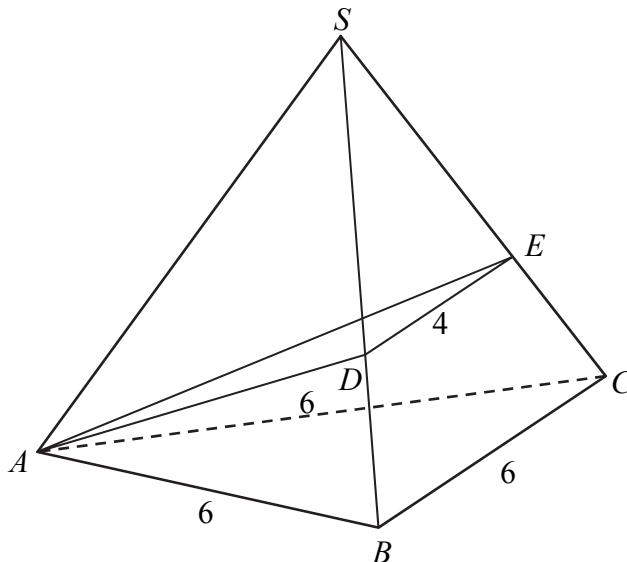
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 4 p.

gdy obliczy liczbę wierzchołków n -kąta foremnego: $n = 18$.

Zadanie 11. (0–6)

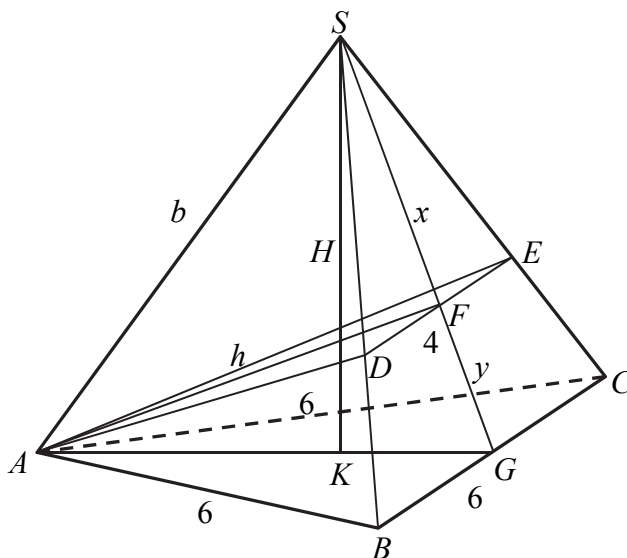
Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6. Na krawędziach bocznych BS i CS wybrano punkty, odpowiednio D i E , takie że $|BD| = |CE|$ oraz $|DE| = 4$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej BCS ostrosłupa.



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia: $|AF| = h$, $|SF| = x$, $|FG| = y$, $|AS| = |BS| = |CS| = b$, $|SK| = H$, jak na rysunku.



Z podobieństwa trójkątów DES i BCS otrzymujemy równanie $\frac{x}{4} = \frac{x+y}{6}$. Stąd $x = 2y$.

W trójkącie równobocznym ABC mamy: $|AG| = 3\sqrt{3}$, $|AK| = 2\sqrt{3}$, $|KG| = \sqrt{3}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ 9y^2 + 9 = b^2 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami pierwsze i trzecie równanie

$$\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ h^2 - 5y^2 = 9 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie i trzecie równanie

$$\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ 6y^2 = 18 \end{cases}.$$

Stąd otrzymujemy $y = \sqrt{3}$. Zatem $|SG| = 3\sqrt{3}$. Obliczamy wysokość i objętość ostrosłupa

$$H = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3} = 2\sqrt{6} \text{ oraz } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2}.$$

Uwagi

1. Zależność $y = \sqrt{3}$ można wyznaczyć też wykorzystując podobieństwo trójkątów AFG i SKG (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku G). Stąd otrzymujemy

$$\frac{|FG|}{|AG|} = \frac{|KG|}{|SG|}$$

$$\frac{y}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3y}$$

Stąd $3y^2 = 3(\sqrt{3})^2$, więc $y = \sqrt{3}$. Zatem $|SG| = 3y = 3\sqrt{3}$.

2. Zdający może skorzystać z podobieństwa trójkątów SDF i SBG , czyli „połówek trójkątów” SDE i BCS .

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- wykorzysta podobieństwo trójkątów DES i BCS i zapisze równanie $\frac{x}{4} = \frac{x+y}{6}$.

albo

- zapisze zależności wynikające z własności trójkąta równobocznego ABC : $|AG| = 3\sqrt{3}$,
 $|AK| = 2\sqrt{3}$, $|KG| = \sqrt{3}$,

albo

- zapisze skalę podobieństwa trójkątów SDE i SBC .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 3 p.

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć długości odcinków potrzebnych do

obliczenia wysokości ostrosłupa, np.:
$$\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ 9y^2 + 9 = b^2 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający obliczy długość odcinka $|SG| = 3\sqrt{3}$.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa $H = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3} = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 18\sqrt{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i jedynym błędem, który jednak nie ułatwia rozważania zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd, polegający na niepoprawnym:
 - a) zapisaniu proporcji z podobieństwa trójkątów,
 - b) zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa,
 - c) zastosowaniu nieistniejącego wzoru „ $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$ ”,to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za rozwiązanie całego zadania.

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$.

Rozwiązanie (I sposób)

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$ zmiennej x jest równy

$$\Delta = (2 - 4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - m - 2) = 4 - 16m + 16m^2 - 16m^2 + 16m + 32 = 36 > 0.$$

Zatem dla każdej wartości parametru m trójmian ten ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{4m-2-6}{2 \cdot 4} = \frac{m-2}{2}, \quad x_2 = \frac{4m-2+6}{2 \cdot 4} = \frac{m+1}{2}.$$

Oba pierwiastki są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{m-2}{2} > 0 \text{ i } \frac{m+1}{2} > 0,$$

$$m > 2 \text{ i } m > -1,$$

$$m > 2.$$

Nierówność $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$ możemy więc zapisać w postaci

$$\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4},$$

$$m^2 + 2m + 1 + m^2 - 4m + 4 \leq 17,$$

$$2m^2 - 2m - 12 \leq 0,$$

$$m^2 - m - 6 \leq 0,$$

$$(m+2)(m-3) \leq 0,$$

więc

$$m \in \langle -2, 3 \rangle.$$

Uwzględniając warunek $m > 2$, otrzymujemy $m \in (2, 3)$.

Uwaga 1.

Pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$ zmiennej x możemy wyznaczyć, rozkładając ten trójmian na czynniki w następujący sposób

$$4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2 = 4x^2 + 2x - 4mx + m^2 - m - 2 =$$

$$= 4x^2 - 2mx + 4x - 2mx - 2x + m^2 - 2m - 2x + m - 2 =$$

$$= 2x(2x - m + 2) - m(2x - m + 2) - (2x - m + 2) =$$

$$= (2x - m - 1)(2x - m + 2) = 4\left(x - \frac{m+1}{2}\right)\left(x - \frac{m-2}{2}\right).$$

To oznacza, że dla każdej wartości parametru m trójmian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$x_1 = \frac{m-2}{2}, \quad x_2 = \frac{m+1}{2}.$$

Uwaga 2.

Aby wyznaczyć zbiór tych wartości parametru m , dla których oba pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$ zmiennej x są dodatnie wystarczy zauważyć, że

$x_1 = \frac{m-2}{2} < \frac{m+1}{2} = x_2$, więc wystarczy, żeby spełniona była nierówność $\frac{m-2}{2} > 0$, czyli $m > 2$.

Uwaga 3.

Możemy też zauważyć, że oba istniejące pierwiastki trójmianu kwadratowego są dodatnie, gdy $f(0) > 0$ i $x_w > 0$, gdzie $f(x) = 4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$. Otrzymujemy wtedy układ nierówności z niewiadomą m

$$m^2 - m - 2 > 0 \text{ i } \frac{4m-2}{2 \cdot 4} > 0$$

$$(m-2)(m+1) > 0 \text{ i } m > \frac{1}{2}$$

$$m-2 > 0 \text{ i } m > \frac{1}{2}$$

$$m > 2.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i stwierdzeniu, że dla każdej wartości parametru m istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $\Delta = 36 > 0$, więc równanie ma dla każdej wartości parametru m dwa rozwiązania.

Za poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający rozkłada trójmian $4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$ na czynniki i otrzymuje postać, w której wszystkie składniki mają ten sam czynnik, np.:

$2x(2x - m + 2) - m(2x - m + 2) - (2x - m + 2)$, to takie działanie jest odpowiednikiem realizacji pierwszego etapu rozwiązania i zdający otrzymuje wtedy **1 punkt**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu

- wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , dla których oba pierwiastki są dodatnie

oraz

- wyznaczeniu tych wszystkich wartości parametru m , dla których spełniony jest warunek $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$

Za ten etap rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Za wyznaczenie pierwiastków w zależności od m : $x_1 = \frac{m-2}{2}$, $x_2 = \frac{m+1}{2}$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Za zapisanie układu nierówności $\frac{m-2}{2} > 0$ i $\frac{m+1}{2} > 0$ oraz jego rozwiązanie $m \in (2, +\infty)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający ustali, że oba pierwiastki trójmianu kwadratowego są dodatnie, gdy $f(0) > 0$ i $x_w > 0$, to otrzymuje **1 punkt** za realizację II etapu.

Jeżeli dodatkowo zdający wyznaczy poprawnie wszystkie wartości m , które spełniają te dwa warunki, to otrzymuje **2 punkty** za realizację II etapu.

Za zapisanie nierówności $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4}$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Za rozwiązanie nierówności $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4} : m \in \langle -2, 3 \rangle$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Trzeci etap rozwiązania polega na wyznaczeniu wartości parametru m z uwzględnieniem wszystkich warunków

Za zapisanie części wspólnej rozwiązań $m \in (2, 3)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie (II sposób)

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2 + (2-4m)x + m^2 - m - 2$ zmiennej x jest równy

$$\Delta = (2-4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - m - 2) = 4 - 16m + 16m^2 - 16m^2 + 16m + 32 = 36 > 0.$$

Zatem dla każdej wartości parametru m trójmian ten ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 .

Oba pierwiastki są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 > 0 \text{ i } x_1 \cdot x_2 > 0, \\ \frac{4m-2}{2} > 0 \text{ i } \frac{m^2-m-2}{2} > 0, \\ 4m > 2 \text{ i } m^2 - m - 2 > 0, \\ m > \frac{1}{2} \text{ i } (m-2)(m+1) > 0, \\ m > \frac{1}{2} \text{ i } m-2 > 0, \\ m > 2. \end{aligned}$$

Nierówność $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 &\leq \frac{17}{4}, \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &\leq \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\frac{4m-2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m^2-m-2}{2} &\leq \frac{17}{4}, \\ 4m^2 - 4m + 1 - 2(m^2 - m - 2) &\leq 17, \\ 2m^2 + 2m - 12 &\leq 0 \\ m^2 + m - 6 &\leq 0, \\ (m+2)(m-3) &\leq 0. \end{aligned}$$

więc

$$m \in \langle -2, 3 \rangle.$$

Uwzględniając warunek $m > 2$, otrzymujemy $m \in (2, 3)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów, każdy etap polega na zapisaniu i rozwiązaniu nierówności lub układu nierówności z niewiadomą m . W efekcie zdający musi rozwiązać cztery nierówności z niewiadomą m .

Pierwszy etap polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i stwierdzeniu, że dla każdej wartości parametru m istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $\Delta = 36 > 0$, więc równanie ma dla każdej wartości parametru m dwa rozwiązania.

Za poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Drugi etap

Zapisanie nierówności $x_1 x_2 > 0$ w postaci . Za poprawne rozwiązanie tej nierówności $m \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

1. $x_1 + x_2 > 0$. Za poprawne rozwiązanie tej nierówności $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

2. $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$. Za poprawne rozwiązanie tej nierówności zdający otrzymuje **2 punkty**.

Przy czym za przekształcenie nierówności do postaci $\left(\frac{4m-2}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m^2 - m - 2}{4} \leq \frac{17}{4}$ otrzymuje **1 punkt**.

Trzeci etap

Za zapisanie części wspólnej rozwiązań $m \in (2, 3)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

- Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
- Jeżeli zdający stosuje nieistniejącą zależność: „suma kwadratów = kwadrat sumy”, prowadzącą do uproszczenia badanego problemu, lub zdający stosuje inny błędny wzór, prowadzący do uproszczenia badanego problemu, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
- Za trzeci etap rozwiązania (zapisanie części wspólnej zbiorów rozwiązań otrzymanych nierówności) zdający może otrzymać 1 punkt tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie następujące warunki:

a) $Z_i \neq \emptyset$ dla każdego $i = 0, 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$;

b) $Z_i \neq \mathbb{R}$ dla każdego $i = 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$;

c) $\sim (Z_i \subset Z_j)$ dla każdego $i \neq j$ oraz $i, j = 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$ poza inkluzją $Z_{1_1} \subset Z_{2_1}$, która jest prawdziwa.

W powyższych zapisach:

$Z_0 = \mathbb{R}$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $\Delta(m) > 0$;

$Z_{1_1} = (2, +\infty)$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $x_1(m) > 0$;

$Z_{1_2} = (-1, +\infty)$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $x_2(m) > 0$;

$Z_3 = \langle -2, 3 \rangle$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $(x_1^2 + x_2^2)(m) \leq \frac{17}{4}$;

$Z_{1_2} = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $(x_1 + x_2)(m) > 0$;

$Z_{2_2} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $(x_1 \cdot x_2)(m) > 0$.

Zadanie 13. (0–6)

Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 90. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz długość boku tego rombu.

Rozwiązanie (I sposób)

Wyznaczamy równanie prostej k zawierającej przekątną AC rombu (prosta k jest prostopadła do prostej l , punkt A leży na prostej k).

$$k : y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Z układu równań $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$ wyznaczamy współrzędne punktu $S = (4, 3)$ (środek symetrii

rombu). Punkt S jest jednocześnie środkiem przekątnej AC , co pozwala obliczyć długość

$$\text{przekątnej } AC: 2 \cdot |AS| = 2 \cdot \sqrt{(4+2)^2 + (3-6)^2} = 2 \cdot \sqrt{36+9} = 6\sqrt{5}.$$

Wykorzystujemy informację o polu rombu i obliczamy długość drugiej przekątnej.

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = 90$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot |BD| = 90$$

$$|BD| = 6\sqrt{5}$$

Stwierdzamy, że rozważany romb jest kwadratem, którego przekątna ma długość $6\sqrt{5}$. Zatem

$$\text{bok kwadratu ma długość } \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{10}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej l , przechodzącej przez punkt A :

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy współrzędne punktu S : $S = (4, 3)$.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy obliczy długość $|AS| = 3\sqrt{5}$.

Uwaga: Jeżeli zdający obliczy $|AS| = 3\sqrt{5}$ jako odległość punktu A od prostej l bez korzystania ze współrzędnych środka symetrii rombu i bez zapisania równania prostej prostopadłej do prostej l , to otrzymuje **3 punkty**.

Zdający otrzymuje 4 p.

gdy obliczy długość przekątnej $|BD| = 6\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje 5 p.

gdy zauważy, że rozważany romb jest kwadratem.

Zdający otrzymuje 6 p.

gdy obliczy długość boku rombu: $3\sqrt{10}$.

Uwaga

Jeżeli zdający nie zapisze, że rozważany romb jest kwadratem, ale korzysta z tego faktu i poprawnie wyznacza długość boku kwadratu, to może otrzymać 6 punktów, o ile nie popełnia błędów na innych etapach rozwiązania.

Rozwiązanie (II sposób)

Wyznaczamy równanie prostej k zawierającej przekątną AC rombu (prosta k jest prostopadła do prostej l , punkt A leży na prostej k).

$$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Z układu równań $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$ wyznaczamy współrzędne punktu $S = (4, 3)$ (środek symetrii

rombu). Zauważamy, że pole trójkąta ABS stanowi $\frac{1}{4}$ pola rombu $ABCD$ i jest równe 22,5.

Uwaga: Zdający może wyznaczyć współrzędne punktu $C: C = (10, 0)$ i wyznaczyć współrzędne punktu B przy wykorzystaniu pola trójkąta ABC , które jest równe 45.

Przyjmujemy oznaczenia dla współrzędnych punktu $B: B = (x_B, y_B)$. Wyznaczamy

współrzędne wektorów $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AS} = [4 + 2, 3 - 6] = [6, -3], \quad \overrightarrow{AB} = [x_B + 2, y_B - 6].$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABS :

$$P_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} |6y_B - 36 + 3x_B + 6|$$

Punkt B leży na prostej l , więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} |6y_B + 3x_B - 30| = 45 \\ y_B = 2x_B - 5. \end{cases}$$

Otrzymujemy dwa przypadki:

$$15x_B - 60 = 45 \text{ lub } 15x_B - 60 = -45.$$

$$\text{Stąd } x_B = 7 \text{ lub } x_B = 1$$

Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb $(7, 9)$ oraz $(1, -3)$. Zauważamy, że takie same warunki, jak punkt B , spełnia punkt D . Wyciągamy wniosek, że otrzymane pary liczb to współrzędne wierzchołków B oraz D .

Uwaga: Zdający może rozwiązać tylko jeden przypadek, bo może uznać, że do policzenia długości boku rombu wystarczy wyznaczyć dowolny z dwóch sąsiednich dla A wierzchołków.

$$\text{Obliczamy długość odcinka } AB: |AB| = \sqrt{(7+2)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy wyznaczy równanie prostej

$$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy obliczy współrzędne punktu S : $S = (4, 3)$.

Zdający otrzymuje 3 p.
gdy wykorzysta wartość pola rombu i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi –
współrzędnymi wierzchołka rombu, np.: $|6y_B + 3x_B - 30| = 45$.

Zdający otrzymuje 4 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą – współrzędną punktu B , np.:
 $|12x_B - 30 + 3x_B - 30| = 45$.

Zdający otrzymuje 5 p.
gdy obliczy współrzędne punktu B , np.: $B = (7, 9)$.

Zdający otrzymuje 6 p.
gdy obliczy długość boku rombu: $3\sqrt{10}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i jedynym błędem nierachunkowym, który jednak nie ułatwia rozważania zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd, polegający na niepoprawnym:
 - a) ustaleniu współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej,
 - b) wyznaczeniu wyrazu wolnego w równaniu prostej prostopadłej,
 - c) zastosowaniu niepoprawnego wzoru na pole rombu lub pole trójkąta,
 - d) wyznaczeniu współrzędnych wektora,
 - e) zastosowaniu wzoru na odległość punktu od prostej,
 - f) zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa,
 - g) zastosowaniu nieistniejącego wzoru „ $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ ”to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za rozwiązanie całego zadania.

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $4\sin 7x \cos 2x = 2\sin 9x - 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Rozwiązanie I sposób

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$4\sin 7x \cos 2x = 2\sin 9x - 1$$

$$2\sin 7x \cos 2x = \sin 9x - \frac{1}{2}$$

$$\sin 9x + \sin 5x = \sin 9x - \frac{1}{2}$$

$$\sin 5x = -\frac{1}{2}$$

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k - \text{liczba całkowita.}$$

Zatem w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ mamy następujące rozwiązania tego równania:

$$x = \frac{7\pi}{30}, x = \frac{19\pi}{30}, x = \frac{11\pi}{30}, x = \frac{23\pi}{30}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zastosuje wzór $\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cos 2x$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej $\sin 5x = -\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązanie równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k - \text{liczba całkowita.}$$

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{7\pi}{30}, x = \frac{19\pi}{30},$

$$x = \frac{11\pi}{30}, x = \frac{23\pi}{30}.$$

Rozwiązanie II sposób

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$4 \sin 7x \cos 2x = 2 \sin 9x - 1$$

$$2 \sin 7x \cos 2x = \sin(7x + 2x) - \frac{1}{2}$$

$$2 \sin 7x \cos 2x = \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x - \frac{1}{2}$$

$$\sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 5x = -\frac{1}{2}$$

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k - \text{liczba całkowita.}$$

Zatem w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ mamy następujące rozwiązania tego równania:

$$x = \frac{7\pi}{30}, x = \frac{19\pi}{30}, x = \frac{11\pi}{30}, x = \frac{23\pi}{30}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze, równanie w postaci $\sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x = -\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej $\sin 5x = -\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązanie równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{7\pi}{30}, x = \frac{19\pi}{30},$

$$x = \frac{11\pi}{30}, x = \frac{23\pi}{30}.$$

Uwaga

1. Jeżeli zdający przed uzyskaniem elementarnych równań trygonometrycznych popełnia jeden błąd, polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzoru: na sumę sinusów lub na sinus sumy, to może otrzymać:

- co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile w rezultacie konsekwentnego postępowania otrzyma 4 rozwiązania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

albo

- co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile w rezultacie konsekwentnego postępowania otrzyma 2 serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

2. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ zdający zapisze serie dla kąta x , zamiast kąta $5x$, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ zdający zapisze serie dla kąta $5x$ i jedynym popełnionym przez niego błędem jest zapisanie niepoprawnej wielokrotności kąta π , to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, ale tylko w przypadku, gdy wśród zapisanych rozwiązań co najmniej dwa znajdują się w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

4. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ zdający zapisze poprawnie tylko jedną serię dla kąta $5x$ i dalej konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ zdający nie zapisze serii dla kąta $5x$, ale zapisze niepoprawne serie dla kąta x , i na tym zakończy, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

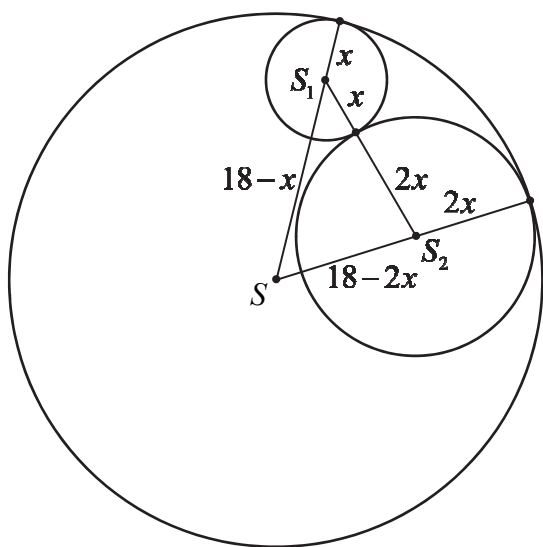
Zadanie 15. (0–7)

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku S_1 i promieniu x oraz drugi o środku S_2 i promieniu $2x$, o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwa rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 18;
- punkty: S, S_1, S_2 nie leżą na jednej prostej.

Pole trójkąta o bokach a, b, c można obliczyć ze wzoru Herona $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p – jest połową obwodu trójkąta.

Zapisz pole trójkąta SS_1S_2 jako funkcję zmiennej x . Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

Rozwiązanie

Z warunku styczności okręgów otrzymujemy równania:

$$|SS_1| = 18 - x,$$

$$|SS_2| = 18 - 2x,$$

$$|S_1S_2| = 2x + x = 3x.$$

Połowa obwodu trójkąta SS_1S_2 jest równa $p = \frac{18 - 2x + 18 - x + 2x + x}{2} = 18$.

Zatem pole tego trójkąta możemy zapisać jako funkcję zmiennej x , wzorem

$$P = \sqrt{18 \cdot 2x \cdot x \cdot (18 - 3x)} = \sqrt{108x^2(6 - x)}.$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór takich wartości x , że $x \in (0, 6)$. Wystarczy zbadać funkcję

$$f(x) = -x^3 + 6x^2. \text{ Pochodna tej funkcji jest równa } f'(x) = -3x^2 + 12x.$$

Obliczmy miejsca zerowe i zbadajmy znak pochodnej

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x = 0, \text{ stąd } x = 0 \text{ lub } x = 4.$$

Uwzględniając dziedzinę funkcji mamy:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (4, 6)$$

Zatem funkcja f jest w przedziale $(0, 4)$ rosnąca, a w przedziale $(4, 6)$ malejąca.

Wynika stąd, że dla $x = 4$ funkcja f ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie jej największą wartością.

Długości boków trójkąta o największym polu wynoszą:

$$|SS_1| = 14,$$

$$|SS_2| = 10,$$

$$|S_1S_2| = 12.$$

$$\text{Oraz pole } P = \sqrt{108 \cdot 16 \cdot 2} = 24\sqrt{6}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

a) zapisanie równań wynikających z warunku styczności okręgów, $|SS_1| = 18 - x$,

$$|SS_2| = 18 - 2x, \quad |S_1S_2| = 2x + x = 3x,$$

b) zapisanie pola trójkąta jako funkcji zmiennej x :

$$P = \sqrt{108x^2(6-x)}$$

c) określenie dziedziny funkcji P : $0 < x < 6$.

Za każdą z części tego etapu zdający może otrzymać po **1 punkcie**.

Uwaga do etapu I

Punkt za część trzecią (wyznaczenie dziedziny funkcji) zdający otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części tego etapu, pod warunkiem, że rozważa wyznaczoną przez siebie funkcję jednej zmiennej.

- **Drugi etap** składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = -3x^2 + 12x$,

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = 0$ lub $x = 4$.

c) wyznaczenie przedziałów monotoniczności funkcji f i uzasadnienie, że dla $x = 4$ funkcja f osiąga największą wartość.

Uwagi do etapu II

II. 1. Jeżeli zdający wyznaczy pochodną funkcji z błędem, ale wyznaczona pochodna ma postać funkcji kwadratowej, która ma dwa miejsca zerowe, w tym przynajmniej jedno w wyznaczonej dziedzinie funkcji, to zdający może otrzymać punkty za część 2. i 3. tego etapu, o ile konsekwentnie obliczy miejsca zerowe pochodnej lub uzasadni istnienie najmniejszej wartości rozważanej funkcji.

II. 2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.

II. 3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości x , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający:

- opisuje, słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji f ;
- zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja f ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość. Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

- **Trzeci etap.**

Obliczenie długości boków i pola trójkąta $|SS_1| = 14$, $|SS_2| = 10$, $|S_1S_2| = 12$, $P = 24\sqrt{6}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.