



**CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA**

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017**

**FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-R1**

MAJ 2017

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.e).

Przykładowe rozwiązania

I sposób (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 5 \rangle$, $\langle 5, +\infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x \in (-\infty, 1)$	$x \in \langle 1, 5 \rangle$	$x \in \langle 5, +\infty)$
$-x + 1 - x + 5 \leq 10 - 2x$ $6 \leq 10$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x < 1$	$x - 1 - x + 5 \leq 10 - 2x$ $2x \leq 6$ $x \leq 3$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $1 \leq x \leq 3$	$x - 1 + x - 5 \leq 10 - 2x$ $4x \leq 16$ $x \leq 4$ W tym przypadku nierówność nie ma rozwiązania.

Sumując otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $(-\infty, 3)$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, 3)$.

II sposób (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

W każdym z nich rozwiązujemy nierówność bądź układ nierówności

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \\ x-1+x-5 \leq 10-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 5 \\ 4x \leq 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ Brak rozwiązań	$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 < 0 \\ x-1-x+5 \leq 10-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 5 \\ 2x \leq 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$ Rozw.: $1 \leq x \leq 3$	$\begin{cases} x-1 < 0 \\ x-5 \geq 0 \\ -x+1+x-5 \leq 10-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq 5 \\ 2x \leq 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq 5 \\ x \leq 7 \end{cases}$ Brak rozwiązań	$\begin{cases} x-1 < 0 \\ x-5 < 0 \\ -x+1-x+5 \leq 10-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ x < 5 \\ 6 \leq 10 \end{cases}$ Rozw.: $x < 1$
--	---	--	---

Sumując otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $(-\infty, 3)$.

III sposób (rozwiązanie graficzne)

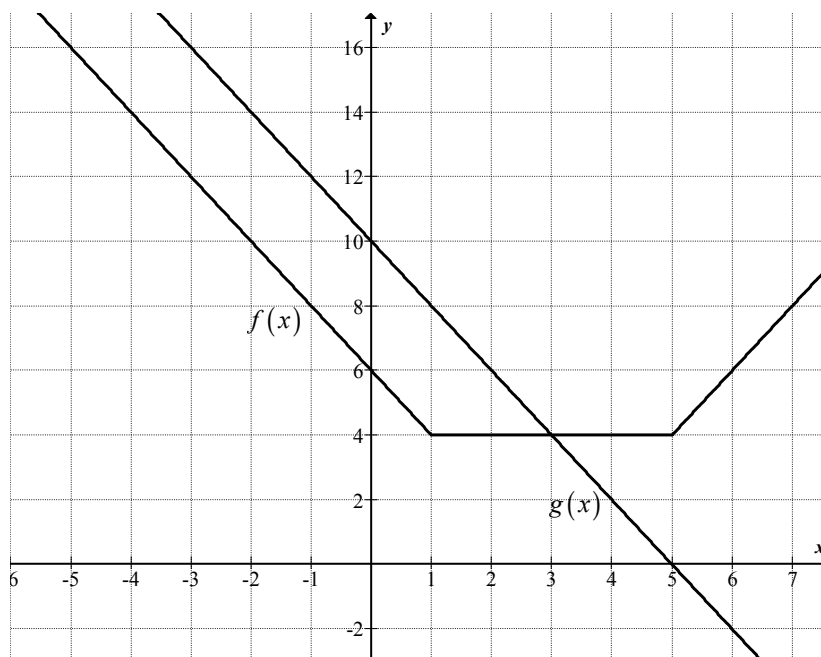
Rysujemy wykresy funkcji $f(x) = |x-1| + |x-5|$ i $g(x) = 10 - 2x$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, 1)$, $(1, 5)$, $(5, +\infty)$.

Zapisujemy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6 & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ 4 & \text{dla } x \in (1, 5) \\ 2x - 6 & \text{dla } x \in (5, +\infty) \end{cases}$$

Rysujemy wykresy funkcji f i g :



Odczytujemy odcietą punktu przecięcia wykresów funkcji f i g : $x = 3$.

Sprawdzamy, czy spełniają one równanie $|x-1| + |x-5| \leq 10 - 2x$, a następnie podajemy te wszystkie argumenty, dla których $f(x) \leq g(x)$: $x \in (-\infty, 3]$.

Uwaga

Zdający powinien zauważyć, że wykres funkcji f oraz wykres funkcji g dla $x \in (-\infty, 1)$ są równoległe.

Schemat punktowaniaI i II sposób rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 1 p.**

Zdający

- wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 5)$, $\langle 5, +\infty)$.

albo

- zapisze cztery przypadki:

$$\begin{array}{llll} \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} & \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} & \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} & \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} \end{array}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

UwagaJeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów**.Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.**Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.**

Zdający

- zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.:

$$\text{dla } x \in (-\infty, 1) \text{ mamy } -x+1-x+5 \leq 10-2x,$$

$$\text{dla } x \in \langle 1, 5) \text{ mamy } x-1-x+5 \leq 10-2x,$$

$$\text{dla } x \in \langle 5, +\infty) \text{ mamy } x-1+x-5 \leq 10-2x$$

albo

- zapisze nierówności w poszczególnych przypadkach, np.:

$$\text{gdy } x-1 \geq 0 \text{ i } x-5 \geq 0, \text{ to wtedy } x-1+x-5 \leq 10-2x,$$

$$\text{gdy } x-1 \geq 0 \text{ i } x-5 < 0, \text{ to wtedy } x-1-x+5 \leq 10-2x,$$

$$\text{gdy } x-1 < 0 \text{ i } x-5 \geq 0, \text{ to wtedy } -x+1+x-5 \leq 10-2x \text{ (lub stwierdzi, że ten przypadek jest niemożliwy),}$$

$$\text{gdy } x-1 < 0 \text{ i } x-5 < 0, \text{ to wtedy } -x+1-x+5 \leq 10-2x$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwagi

- Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
- Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 p.

Zdający

- poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko dla dwóch przedziałów (spośród trzech wskazanych w I sposobie rozwiązania), popełni błąd w trzecim i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku oraz stwierdzi, że przypadek:

$$x-1 < 0 \text{ i } x-5 \geq 0$$

jest niemożliwy i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in (-\infty, 3)$.

Uwaga

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 5 \rangle$, $\langle 5, +\infty \rangle$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach, np.:

$$\text{dla } x \in (-\infty, 1) \text{ mamy } f(x) = -2x + 6,$$

$$\text{dla } x \in \langle 1, 5 \rangle \text{ mamy } f(x) = 4,$$

$$\text{dla } x \in \langle 5, +\infty \rangle \text{ mamy } f(x) = 2x - 6$$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6 & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 1, 5 \rangle \\ 2x - 6 & \text{dla } x \in \langle 5, +\infty \rangle \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 10 - 2x$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in (-\infty, 3)$.

Zadanie 2. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x-a$; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$ (R2.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe (R3.c).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Korzystając z warunków zadania zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} W(3) = 0 \\ W(-2) = 20 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} 54 + 9a - 39 + b = 0 \\ -16 + 4a + 26 + b = 20 \end{cases}$$

Z układu równań obliczamy a i b

$$\begin{cases} 9a + b = -15 \\ 4a + b = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9a + 10 - 4a = -15 \\ b = 10 - 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 30 \end{cases}$$

Dla $a = -5$, $b = 30$ otrzymujemy $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 13x + 30$.

Obliczamy pozostałe pierwiastki wielomianu wykonując np. dzielenie wielomianu $W(x)$

$$\text{przez } (x-3): W(x) = (x-3)(2x^2 + x - 10) = 2(x-3)(x-2)\left(x + \frac{5}{2}\right).$$

Pozostałymi pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby 2 oraz $-\frac{5}{2}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zapisze jedno z równań:

$54 + 9a - 39 + b = 0$ albo $-16 + 4a + 26 + b = 20$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Wystarczy, że zdający zapisze $\begin{cases} W(3) = 0 \\ W(-2) = 20. \end{cases}$

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze układ równań

$$\begin{cases} 54 + 9a - 39 + b = 0 \\ -16 + 4a + 26 + b = 20 \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający rozwiąże układ równań: $a = -5$, $b = 30$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.

Zdający

- wykona poprawnie dzielenie wielomianu $W(x)$ przez $(x-3)$:

$$W(x):(x-3)=2x^2+x-10$$

albo

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym i obliczy pozostałe pierwiastki konsekwentnie do popełnionego błędu;

albo

- podzieli wielomian z błędem rachunkowym i obliczy pozostałe pierwiastki konsekwentnie do popełnionego błędu.

Rozwiązanie bezbłędne 5 p.

Zdający obliczy pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x): 2$ oraz $-\frac{5}{2}$.

Zadanie 3. (0–5)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.a).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zapisujemy układ warunków

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (4x_1 - 4x_2)^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$. Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność $4(m+6)^2 > 0$, której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz $m = -6$.

Drugą nierówność przekształcamy równoważnie i otrzymujemy kolejno:

$$16(x_1 - x_2)^2 - 1 < 0,$$

$$16(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 1 < 0,$$

$$16[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] - 1 < 0.$$

Stosujemy wzory Viete'a i otrzymujemy: $16\left(\frac{36m^2}{16} - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}\right) - 1 < 0$.

Przekształcamy nierówność równoważnie otrzymujemy kolejno:

$$36m^2 - 32m^2 + 48m + 143 < 0, \\ 4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność.

$$\Delta = 2304 - 2288 = 16 \\ m_1 = \frac{-48 - 4}{8} = -\frac{13}{2}, \quad m_2 = \frac{-48 + 4}{8} = -\frac{11}{2}, \\ m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right).$$

Wyznaczamy część wspólną obu warunków: $m \in \left(-\frac{13}{2}, -6\right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2}\right)$.

II sposób

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$. Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność $4(m+6)^2 > 0$, której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz $m = -6$.

Obliczamy pierwiastki równania, z zachowaniem warunku $x_1 < x_2$:

$$x_1 = \frac{6m - 2|m+6|}{8} = \frac{3m - |m+6|}{4}, \quad x_2 = \frac{6m + 2|m+6|}{8} = \frac{3m + |m+6|}{4}.$$

Obliczamy wartość wyrażenia $4x_1 - 4x_2$ w zależności od m :

$$4x_1 - 4x_2 = 4 \cdot \frac{-2|m+6|}{4} = -2|m+6|.$$

Zapisujemy nierówność z treści zadania z wykorzystaniem wyznaczonych rozwiązań równania i przekształcamy ją równoważnie, otrzymując kolejno:

$$(-2|m+6|-1)(-2|m+6|+1) < 0, \\ -[1 - 4(m+6)^2] < 0, \\ 4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Dalsza część rozwiązania przebiega podobnie jak w I sposobie rozwiązania,

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiąże nierówność $\Delta \geq 0$ i nie odrzuci przypadku $\Delta = 0$, to za ten etap otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na znalezieniu wartości m , dla których spełniona jest nierówność: $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Poniżej podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje **1 punkt** gdy:

- zapisze nierówność $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$ w postaci równoważnej zawierającej jedynie sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego $4x^2 - 6mx + (2m + 3)(m - 3)$, np.: $16[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] - 1 < 0$
lub
- obliczy pierwiastki trójmianu:
$$x_1 = \frac{6m - 2|m + 6|}{8} = \frac{3m - |m + 6|}{4}, \quad x_2 = \frac{6m + 2|m + 6|}{8} = \frac{3m + |m + 6|}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje **2 punkty** gdy:

- zapisze nierówność $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$ w postaci nierówności równoważnej z jedną niewiadomą np.: $16\left(\frac{36m^2}{16} - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}\right) - 1 < 0$ lub $4m^2 + 48m + 143 < 0$
lub $(-2|m + 6| - 1)(-2|m + 6| + 1) < 0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje **3 punkty** gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność: $m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapów

I i II oraz podaniu odpowiedzi: $m \in \left(-\frac{13}{2}, -6\right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2}\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru R jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.
2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu przyznajemy **0 punktów** za III etap.
3. W przypadku rozwiązywania z błędami, nieprzekreślającymi poprawności rozumowania, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązywaniu nierówności z etapu II lub gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże etap II (uwaga 3. ma zastosowanie, gdy nie zachodzą przypadki 1. i 2.).
4. Jeżeli zdający w wyniku błędów otrzyma w II etapie nierówność z niewiadomą m stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem lub nierówność liniową, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
5. W przypadku, gdy zdający przyjmuje błędnie $\sqrt{\Delta} = 2(m + 6)$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 4. (0–6)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych (3.c).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego. Skoro suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 27, to $b - r + b + b + r = 27$, a stąd $b = 9$. Wówczas ciąg geometryczny $(7 - r, 9, 2r + 19)$ spełnia warunek $81 = (7 - r) \cdot (2r + 19)$. Równanie to ma dwa rozwiązania

$$r = 4 \text{ i } r = -\frac{13}{2}.$$

W pierwszym przypadku otrzymujemy ciąg arytmetyczny $(5, 9, 13)$, a w drugim przypadku ciąg arytmetyczny $\left(\frac{31}{2}, 9, \frac{5}{2}\right)$.

II sposób

Liczby a, b, c są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego, zatem $\frac{a+c}{2} = b$. Suma liczb a, b, c równa 27, stąd $a + b + c = 27$. Ciąg $(a - 2, b, 2c + 1)$ jest geometryczny, zatem $b^2 = (a - 2) \cdot (2c + 1)$.

Zapisujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a+b+c = 27 \\ b^2 = (a-2) \cdot (2c+1) \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a + c = 2b$, podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy $b = 9$.

Do trzeciego równania podstawiamy $b = 9$ i $a = 2b - c$ i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$2c^2 - 31c + 65 = 0. \text{ Równanie to ma dwa rozwiązania: } c = \frac{5}{2} \text{ oraz } c = 13. \text{ W pierwszym}$$

przypadku otrzymujemy: $a = 5, b = 9, c = 13$ a w drugim przypadku otrzymujemy: $a = \frac{31}{2},$

$$b = 9, c = \frac{5}{2}.$$

III sposób

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego, natomiast $a-2$ pierwszy wyraz tego ciągu.

Wtedy $b = (a-2)q$ i $2c+1 = (a-2)q^2$. Z ostatniej zależności otrzymujemy $c = \frac{(a-2)q^2 - 1}{2}$.

Ponieważ suma liczb a , b , c jest równa 27, więc możemy zapisać równość

$$a + (a-2)q + \frac{(a-2)q^2 - 1}{2} = 27.$$

Z własności ciągu arytmetycznego wynika równanie

$$b = \frac{a+c}{2},$$

które możemy zapisać w postaci

$$(a-2)q = \frac{2a + (a-2)q^2 - 1}{4}.$$

Otrzymaliśmy zatem układ równań z niewiadomymi a i q :

$$2a + 2(a-2)q + (a-2)q^2 = 55$$

$$4(a-2)q = 2a + (a-2)q^2 - 1.$$

Ten układ jest równoważny układowi

$$2(a-2) + 2(a-2)q + (a-2)q^2 = 51$$

$$-2(a-2) + 4(a-2)q - (a-2)q^2 = 3$$

Po wyłączeniu czynnika $(a-2)$ każde z równań przyjmuje postać

$$(a-2)(2 + 2q + q^2) = 51$$

$$(a-2)(-2 + 4q - q^2) = 3$$

Zatem

$$3(2 + 2q + q^2) = 51(-2 + 4q - q^2),$$

skąd otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3q^2 - 11q + 6 = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania

$$q = 3, \quad q = \frac{2}{3}.$$

Jeśli $q = 3$, to $a = 5$, $b = 9$ i $c = 13$. Jeżeli natomiast $q = \frac{2}{3}$, to $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$ i $c = \frac{5}{2}$.

Schemat punktowaniaI sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający uzależni wartości dwie spośród liczb a , b , c od trzeciej z liczb i od różnicy r ciągu arytmetycznego, np.: $a = b - r$ i $c = b + r$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze równania wynikające z własności ciągu arytmetycznego i z własności ciągu geometrycznego, np.: $a = b - r$, $c = b + r$, $b^2 = (a - 2) \cdot (2c + 1)$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, wynikające z własności ciągu geometrycznego, np.: $81 = (7 - r)(2r + 19)$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający obliczy liczby a , b , c w jednym z możliwych przypadków.

Uwaga

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania: $a = 5$, $b = 9$,

$c = 13$ oraz $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$, $c = \frac{5}{2}$.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze jedno z równań: $\frac{a+c}{2} = b$, $b^2 = (a-2) \cdot (2c+1)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze układ trzech równań z trzema niewiadomymi, np.:
$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a+b+c = 27 \\ b^2 = (a-2) \cdot (2c+1) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.: $-2c^2 + 31c + 16 = 81$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający obliczy liczby a , b , c w jednym z możliwych przypadków.

Uwaga

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania: $a = 5$, $b = 9$, $c = 13$ oraz $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$, $c = \frac{5}{2}$.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego w zależności od jednej z liczb i ilorazu ciągu geometrycznego, np.

$$a - 2, b = (a - 2)q, c = \frac{(a - 2)q^2 - 1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$a + (a - 2)q + \frac{(a - 2)q^2 - 1}{2} = 27 \text{ i } (a - 2)q = \frac{2a + (a - 2)q^2 - 1}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.:

$$3(2 + 2q + q^2) = 51(-2 + 4q - q^2)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający obliczy liczby a , b i c w jednym z możliwych przypadków.

Uwaga

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający zapisze dwa zestawy liczb spełniające warunki zadania: $a = 5$, $b = 9$ i $c = 13$

oraz $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$ i $c = \frac{5}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający myli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie jeden zestaw liczb a , b , c , także ze sprawdzeniem warunków zadania, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 5. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$ oraz dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (2.a, 2.f).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$x^2y^2 - 4xy + 4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 > 0,$$

$$(xy - 2)^2 + 2(x^2 - 2xy + y^2) > 0,$$

$$(xy - 2)^2 + 2(x - y)^2 > 0.$$

Ponieważ $x \neq y$, więc $(x - y)^2 > 0$. Zatem lewa strona tej nierówności jest sumą liczby nieujemnej $(xy - 2)^2$ oraz liczby dodatniej $2(x - y)^2$, a więc jest dodatnia.

To kończy dowód.

II sposób

Zapiszmy nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w postaci równoważnej

$$(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4 > 0.$$

Ponieważ $y^2 + 2 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej y , więc możemy potraktować tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą x i parametrem y (lub z niewiadomą y i parametrem x). Wystarczy więc wykazać, że wyróżnik trójmianu kwadratowego $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4$ zmiennej x jest ujemny.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8y)^2 - 4 \cdot (y^2 + 2) \cdot (2y^2 + 4) = 64y^2 - 8(y^2 + 2)^2 = \\ &= 8(8y^2 - y^4 - 4y^2 - 4) = 8(-y^4 + 4y^2 - 4) = -8(y^2 - 2)^2.\end{aligned}$$

Dla każdej liczby rzeczywistej y , takiej, że $y^2 \neq 2$ wyróżnik jest ujemny. Gdy $y^2 = 2$, to wówczas nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ ma postać

$$4x^2 - 8\sqrt{2}x + 8 > 0 \text{ lub } 4x^2 + 8\sqrt{2}x + 8 > 0$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0 \text{ lub } x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 > 0,$$

$$(x - \sqrt{2})^2 > 0 \text{ lub } (x + \sqrt{2})^2 > 0.$$

Ponieważ z założenia wynika, że $x \neq y$, więc $x^2 \neq 2$, a to oznacza, że każda z otrzymanych nierówności jest prawdziwa.

To kończy dowód.

III sposób

Rozpatrzmy nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w trzech przypadkach.

I. Gdy co najmniej jedna z liczb x , y jest równa 0, np. gdy $x = 0$. Wtedy nierówność przyjmuje postać

$$2y^2 + 4 > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej y .

II. Gdy żadna z liczb x, y nie jest równa 0 i gdy $xy < 0$. Wtedy po lewej stronie nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ wszystkie składniki są dodatnie, więc nierówność jest prawdziwa.

III. Gdy żadna z liczb x, y nie jest równa 0 i gdy $xy > 0$. Wtedy, dzieląc obie strony nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ przez xy , otrzymujemy nierówność równoważną

$$\begin{aligned} xy + 2\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} - 8 + \frac{4}{xy} &> 0, \\ xy + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 8 &> 0, \\ xy - 4 + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) &> 0, \\ \left(\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Ponieważ z założenia $x \neq y$, więc $\frac{x}{y} \neq 1$, zatem $\frac{x}{y} \neq \frac{y}{x}$, co oznacza, że $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 > 0$.

Stąd i z tego, że $\left(\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2 \geq 0$ wynika prawdziwość otrzymanej nierówności.

To kończy dowód.

IV sposób

I. Gdy $xy \leq 0$, to wtedy po lewej stronie nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ cztery pierwsze składniki są nieujemne, piąty jest dodatni, więc nierówność jest prawdziwa.

II. Gdy $xy > 0$, wtedy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich $x^2y^2, 2x^2, 2y^2$ i 4 otrzymujemy

$$\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq \sqrt[4]{x^2y^2 \cdot 2x^2 \cdot 2y^2 \cdot 4} = \sqrt[4]{16x^4y^4} = 2xy,$$

skąd

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 \geq 8xy.$$

Równość miałaby miejsce tylko wtedy, gdyby $x^2y^2 = 2x^2 = 2y^2 = 4$, a więc gdyby $x^2 = y^2$, co wobec nierówności $xy > 0$ oznaczałoby $x = y$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 > 8xy,$$

czyli

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowaniaI sposób rozwiązania**Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci $(xy - 2)^2 + 2(x - y)^2 > 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie, uwzględniające założenie, że $x \neq y$.

II sposób rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne 1 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4 > 0$ i obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4$, np.: $\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot (y^2 + 2) \cdot (2y^2 + 4)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający uzasadni, że wyróżnik $\Delta = -8(y^2 - 2)^2$ jest niedodatni dla każdej liczby rzeczywistej y , ale nie rozpatrzy przypadku, gdy $y^2 = 2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

III sposób rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne 1 p.**

Zdający wykaże prawdziwość nierówności w I i w II przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci $xy + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 8 > 0$ w przypadku, gdy $xy > 0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne 1 p.**

Zdający wykaże prawdziwość nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w I przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający uzasadni, że gdy $xy > 0$, to prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq 2xy$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

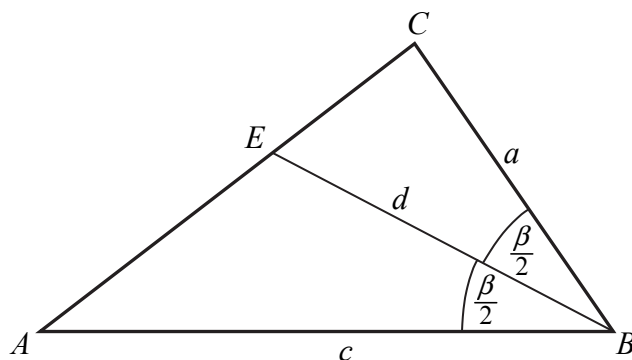
Zadanie 6. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym oraz znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.c, R7.d).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta.$$

Pola trójkątów ABE i CBE są równe

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

Suma pól trójkątów ABE i CBE jest równa polu trójkąta ABC , zatem

$$\frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

Stąd

$$a \cdot c \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = d \cdot (a + c) \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

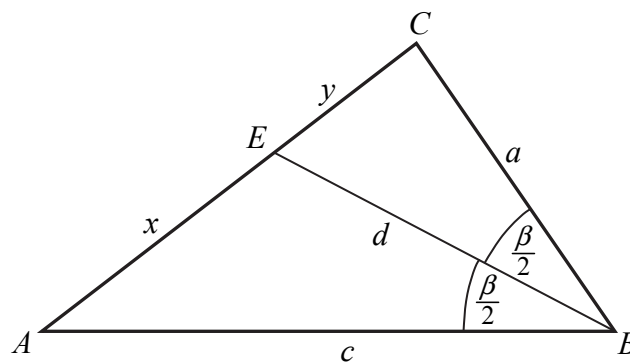
$$2ac \cdot \cos \frac{\beta}{2} = d \cdot (a + c),$$

$$d = \frac{2ac}{a + c} \cdot \cos \frac{\beta}{2}.$$

To kończy dowód.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{y}{x} = \frac{a}{c}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABE i CBE otrzymujemy

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2} \text{ oraz } y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}.$$

Zatem

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}}{c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} a^2 \left(c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2} \right) &= c^2 \left(a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2} \right), \\ a^2 c^2 + a^2 d^2 - 2a^2 cd \cos \frac{\beta}{2} &= a^2 c^2 + c^2 d^2 - 2ac^2 d \cos \frac{\beta}{2}, \\ a^2 d^2 - c^2 d^2 &= 2a^2 cd \cos \frac{\beta}{2} - 2ac^2 d \cos \frac{\beta}{2}, \\ (a^2 - c^2) d &= 2(a - c) ac \cos \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Gdy $a = c$, wówczas trójkąt ABC jest równoramienny, więc trójkąty ABE i CBE są prostokątne i przystające. Wtedy $\cos \frac{\beta}{2} = \frac{d}{c}$, skąd $d = c \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2c^2}{2c} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{\beta}{2}$.

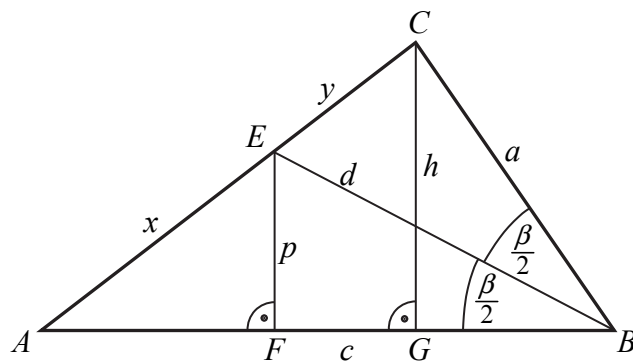
Gdy zaś $a \neq c$, to $(a-c)(a+c) \neq 0$, czyli $a^2 - c^2 \neq 0$, więc

$$d = \frac{2(a-c)}{a^2 - c^2} ac \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{\beta}{2}.$$

To kończy dowód.

III sposób

Poprowadźmy wysokości CG i EF trójkątów ABC i ABE . Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc spodki F i G tych wysokości leżą na boku AB trójkąta ABC . Pozostałe oznaczenia przyjmijmy jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{y}{x} = \frac{a}{c}.$$

Z trójkątów BEF i BCG otrzymujemy

$$\frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } \frac{h}{a} = \sin \frac{\beta}{2}.$$

Stąd

$$p = d \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } h = a \sin \frac{\beta}{2}.$$

Trójkąty AFE i AGC są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A . Zatem

$$\frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|CG|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{p}{x} = \frac{h}{x+y}.$$

Stąd i z poprzednio otrzymanych równości otrzymujemy kolejno

$$\frac{d \sin \frac{\beta}{2}}{x} = \frac{a \sin \beta}{x+y},$$

$$d \sin \frac{\beta}{2} = \frac{a \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{y}{x}},$$

$$d = \frac{2a \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{a}{c}} = \frac{2ac \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 1 p.

Zdający

- zapisze pola każdego z trójkątów ABC , ABE i CBE w zależności od długości a , c , d i kąta

$$\beta: P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta, P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2}, P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

albo

- zapisze, że pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów ABE i CBE oraz zapisze jedno

$$\text{z tych pól: } P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta \text{ lub } P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} \text{ lub } P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze zależność między polem trójkąta ABC i polami trójkątów ABE i CBE w postaci, w której występują jedynie wielkości a , c , d i β , np.:

$$\frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 1 p.**Zdający zapisze zależności między wielkościami x, y, d, a i c oraz kątem β :

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \quad x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}, \quad y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze równanie, np.: $\frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}}{c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

UwagaJeżeli zdający nie rozważy sytuacji gdy $a = c$, to może otrzymać co najwyżej 2 punkty.III sposób rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 1 p.**

Zdający zapisze

- zależność między wielkościami x, y, a i c oraz zależności między wielkościami p, h i a oraz kątem β : $\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2}, \frac{h}{a} = \sin \beta$

albo

- zależność między wielkościami x, y, a i c oraz zależności między wielkościami p, h, x i y oraz kątem β : $\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \frac{p}{x} = \frac{h}{x+y}$

albo

- zależność między wielkościami p, h i a oraz kątem β oraz zależność między wielkościami x, y, a i c : $\frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2}, \frac{h}{a} = \sin \beta, \frac{y}{x} = \frac{a}{c}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.Zdający zapisze wystarczającą liczbę zależności między wielkościami x, y, a, c, p i h oraz kątem β , pozwalającą wyznaczyć d w zależności od wielkości a, c i kąta β , np.:

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \quad \frac{d \sin \frac{\beta}{2}}{x} = \frac{a \sin \beta}{x+y}.$$

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 7. (0–4)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (R10).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązanie

Wybieramy miejsce dla dziewiątek. Jest $\binom{6}{2} = 15$ takich miejsc.

Szóstka może wystąpić na jednym z pozostałych 4 miejsc.

Na pozostałych trzech miejscach mają wystąpić trzy cyfry, których suma ma być równa $30 - 2 \cdot 9 - 6 = 6$.

Mamy następujące możliwości:

1, 2, 3 i na trzech miejscach te cyfry możemy ustawić na $3! = 6$ sposobów,

1, 1, 4 i na trzech miejscach te cyfry możemy ustawić na $\binom{3}{2} \binom{1}{1} = 3$ sposoby,

2, 2, 2 i na trzech miejscach te cyfry możemy ustawić na $\binom{3}{3} = 1$ sposób.

Łącznie, pozostałe trzy cyfry na pozostałych trzech miejscach, możemy ustawić na 10 sposobów.

Stosując regułę mnożenia zapisujemy, że liczba liczb opisanych w treści zadania jest równa $15 \cdot 4 \cdot 10 = 600$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- obliczy liczbę miejsc, na których mogą znajdować się dziewiątki albo
- obliczy liczbę miejsc, na których może znajdować się szóstka i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy liczbę miejsc, na których mogą znajdować się dziewiątki i szóstka, albo obliczy na ile sposobów można ustawić pozostałe trzy cyfry na trzech miejscach, które pozostały.

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy liczbę miejsc, na których mogą znajdować się dziewiątki i szóstka i na ile sposobów można ustawić pozostałe trzy cyfry na trzech miejscach, które pozostały i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne **4 p.**

Zdający zastosuje regułę mnożenia i obliczy, że liczba liczb opisanych w treści zadania jest równa 600.

Uwaga

Zdający może obliczać liczby miejsc dla dziewiątek i szóstki w sposób następujący:

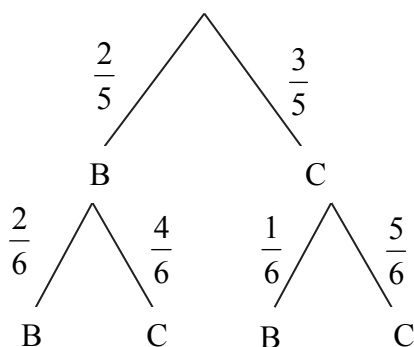
$$\binom{6}{2} \cdot 4 = 60 \text{ albo } 6 \cdot \binom{5}{2} = 60.$$

Zadanie 8. (0–3)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Rysujemy drzewo odzwierciedlające etapy doświadczenia.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A (wylosowanie kuli białej z drugiego pudełka) jest więc równe

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{7}{30}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **1p.**

Zdający narysuje drzewo wraz z opisem prawdopodobieństw na pierwszym etapie doświadczenia i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **2 p.**

Zdający narysuje drzewo wraz z opisem prawdopodobieństw na wszystkich istotnych gałęziach i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne **3 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiego pudełka: $\frac{7}{30}$.

Uwaga

Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

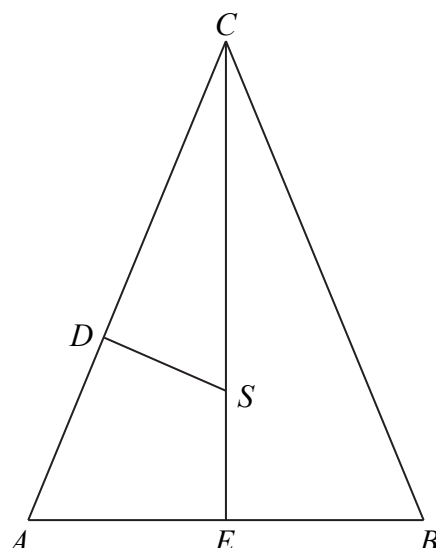
Zadanie 9. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.

7. Planimetria. Zdający stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym (R7.c).

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Oznaczmy przez S środek okręgu wpisanego w trójkąt, wysokość $|CE| = 36$ oraz promień okręgu wpisanego $|ES| = |DS| = 10$.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka DC: $|DC| = \sqrt{|CS|^2 - |DS|^2} = 24$.

Trójkąty AEC i SDC są podobne. Obydwa są prostokątne i mają jeden kąt wspólny.

Otrzymujemy równanie $\frac{36}{|AE|} = \frac{24}{10}$. Stąd $|AE| = 15$. Z twierdzenia o odcinkach stycznych wiemy, że $|AD| = |AE| = 15$. Długości boków tego trójkąta są zatem równe: $|AB| = 30$, $|AC| = |BC| = 39$.

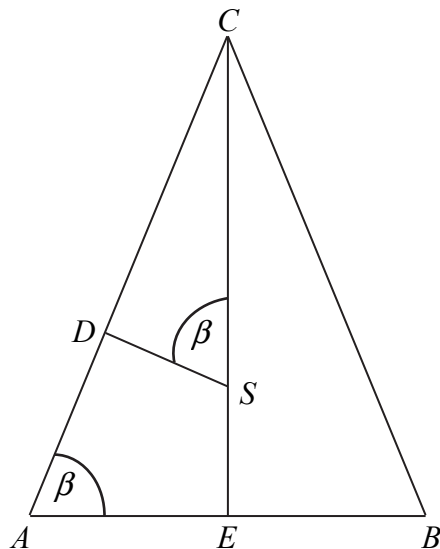
Następnie obliczmy pole trójkąta. $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CE| = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie obliczymy korzystając ze wzoru

$$P = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |CA|}{4 \cdot R} ;$$

$$R = \frac{30 \cdot 39 \cdot 39}{4 \cdot 540} = 21 \frac{1}{8}.$$

II sposób



Oznaczmy przez S środek okręgu wpisanego w trójkąt, wysokość $|CE| = 36$ oraz promień okręgu wpisanego $|ES| = |DS| = 10$. Niech $\sphericalangle CSD = \sphericalangle CAE = \beta$.

Trójkąty AEC i SDC są podobne. Obydwa są prostokątne i mają jeden kąt wspólny.

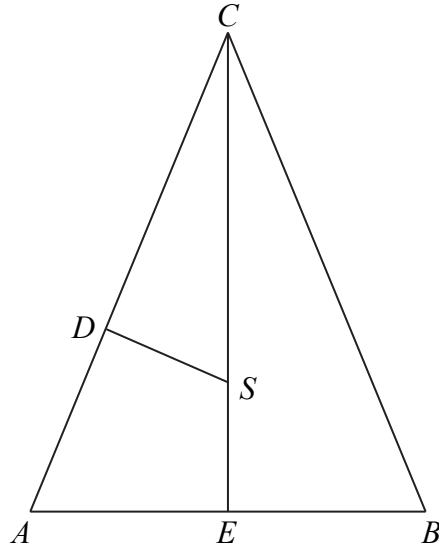
Obliczamy długość odcinka CS : $|CS| = |CE| - |SE| = 26$.

Obliczamy $\cos \beta = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$, wtedy $\sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$.

Obliczamy długość ramienia trójkąta równoramiennego ABC : $\sin \beta = \frac{|CE|}{|AC|}$, stąd $|AC| = 39$.

Z twierdzenia sinusów $\frac{|AC|}{\sin \beta} = 2R$, gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie:

$$2R = \frac{39}{\frac{12}{13}} = \frac{507}{12} = 42 \frac{1}{4}, \text{ zatem } R = 21 \frac{1}{8}.$$

III sposób

Niech $|AB| = a$, $|AC| = |BC| = b$.

Zapisujemy pole trójkąta na trzy sposoby: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 36 = \frac{ab^2}{4R} = 10p$.

Ponieważ $p = \frac{1}{2}(a + 2b)$, stąd $p = \frac{1}{2}a + b$.

Otrzymujemy równanie $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 36 = 10\left(\frac{1}{2}a + b\right)$, stąd $b = \frac{13}{10}a$.

Zapisujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AEC: $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 36^2 = b^2$, stąd $a = 30$.

Zatem $b = \frac{13}{10} \cdot 30 = 39$.

Ponieważ $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = \frac{30 \cdot 39^2}{4R}$, stąd otrzymujemy $R = 21\frac{1}{8}$.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający obliczy długość odcinka $|DC| = 24$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze równanie wynikające z podobieństwa trójkątów AEC i SDC : $\frac{36}{|AE|} = \frac{24}{10}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający obliczy długości boków trójkąta $|AB| = 30$, $|AC| = |BC| = 39$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy jedynie długość podstawy trójkąta: $|AB| = 30$ albo jedynie długość ramienia trójkąta: $|AC| = |BC| = 39$, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający obliczy pole trójkąta: $P = 540$.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy promień okręgu: $R = 21\frac{1}{8}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy promień okręgu: $R = 21\frac{1}{8}$ i nie obliczy długości ramienia trójkąta:

$|AC| = |BC| = 39$, to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający obliczy $\cos \beta : \cos \beta = \frac{5}{13}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy $\cos \beta$ i $\sin \beta : \cos \beta = \frac{5}{13}$ i $\sin \beta = \frac{12}{13}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający obliczy długość ramienia trójkąta ABC : $|AC| = |BC| = 39$ i zauważy, że $\frac{|AC|}{\sin \beta} = 2R$.

Uwaga

Jeżeli zdający jedynie zauważy, że $\frac{|AC|}{\sin \beta} = 2R$ albo jedynie obliczy długość ramienia trójkąta: $|AC| = |BC| = 39$, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający zastosuje twierdzenie sinusów i zapisze, że $\frac{|AC|}{\sin \beta} = 2R$.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy promień okręgu: $R = 21\frac{1}{8}$.

Uwaga

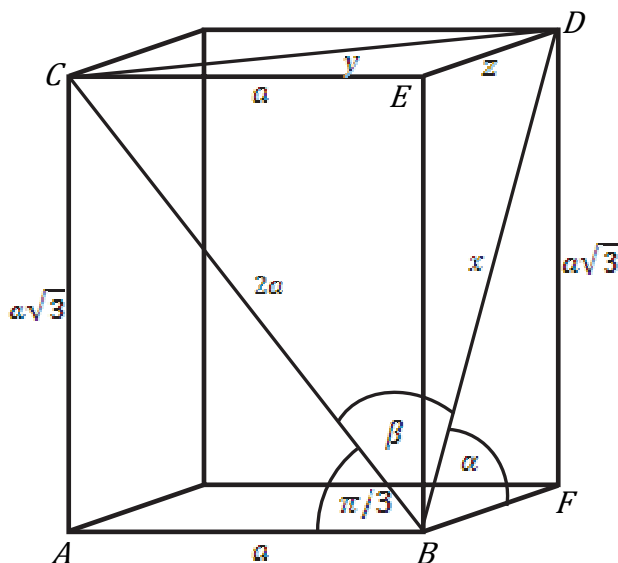
Jeżeli zdający obliczy promień okręgu: $R = 21\frac{1}{8}$ i nie obliczy długości podstawy trójkąta: $|AB| = 30$ to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

Zadanie 10. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną oraz wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (R9.a, 9.b).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Sporządzamy rysunek pomocniczy, wprowadzając oznaczenia i zaznaczając odpowiednie kąty.



Ponieważ trójkąt ABC jest trójkątem pięknym, przyjmijmy, że długości jego boków są równe a , $2a$, $a\sqrt{3}$.

Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta BDC otrzymujemy $y^2 = x^2 + 4a^2 - ax\sqrt{6}$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CED i BDE otrzymujemy:

$$x^2 + 4a^2 - ax\sqrt{6} = a^2 + z^2$$

$$x^2 + 3a^2 - ax\sqrt{6} = x^2 - 3a^2 \quad a > 0$$

$$x = a\sqrt{6}$$

Zatem w trójkącie BFD mamy

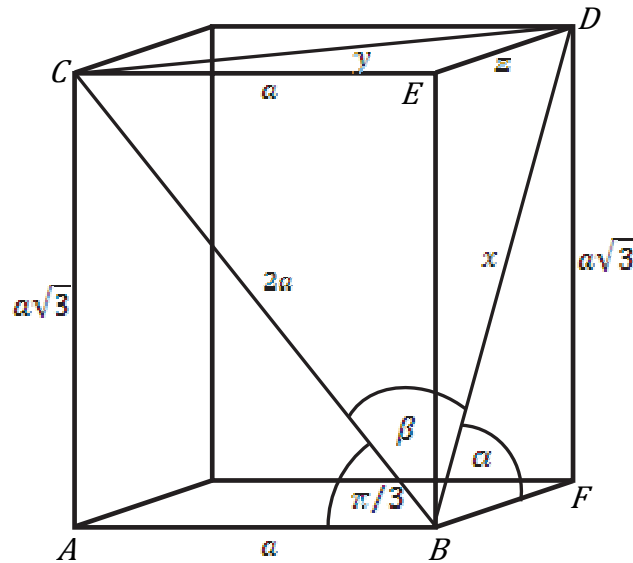
$$\sin \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Stąd } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Kąt między przekątnymi ścian bocznych prostopadłościanu jest równy $\frac{\pi}{4}$.

II sposób

Sporządzamy rysunek pomocniczy, wprowadzając oznaczenia i zaznaczając odpowiednie kąty.



Ponieważ trójkąt ABC jest trójkątem pięknym, przyjmijmy, że długości jego boków są równe a , $2a$, $a\sqrt{3}$.

Zapisujemy długości boków x i z trójkąta BFD w zależności od szukanego kąta α :

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{\sin \alpha} \text{ i } z = \frac{a\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ dla } a > 0 \text{ i } \alpha \neq 0$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CED otrzymujemy

$$y^2 = a^2 + z^2$$

$$y^2 = a^2 + \frac{3a^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta BDC :

$$y^2 = 4a^2 + x^2 - 4ax \cos \beta$$

Po dokonaniu podstawień za x i y otrzymujemy równanie postaci:

$$a^2 + \frac{3a^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 4a^2 + \frac{3a^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{a^2 \sqrt{18}}{\sin \alpha}$$

a po przekształceniach równanie trygonometryczne:

$$2\sin^2 \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha = 0$$

$$\sin \alpha \left(\sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

Rozwiązujemy alternatywę równań

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad \alpha = 0 \text{ nie spełnia warunków zdania}$$

Zatem kąt między przekątnymi ścian bocznych prostopadłościanu ma miarę $\frac{\pi}{4}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający sporządzi rysunek i zaznaczy odpowiednie kąty $\frac{\pi}{3}$, α , β i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze długości boków trójkąta ABC za pomocą jednej zmiennej, np.: a , $2a$, $a\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności 4 p.

Zdający

- zapisze równanie z niewiadomymi a i x , prowadzące do rozwiązania zadania, np.:

$$x^2 + 3a^2 - ax\sqrt{6} = x^2 - 3a^2$$

albo

- zapisze równanie z niewiadomymi a i α , prowadzącego do rozwiązania zadania, np.:

$$a^2 + \frac{3a^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 4a^2 + \frac{3a^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{a^2 \sqrt{18}}{\sin \alpha}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 p.

Zdający popełni błąd rachunkowy na etapie przekształceń równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający wyznaczy miarę kąta α : $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze równanie z niewiadomymi a i x albo z niewiadomymi a i α , z błędami rachunkowymi i na tym poprzestanie, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 11. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, wyznacza współrzędne środka odcinka, rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej (8.g, 8.f, R8.b).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Środek S szukanego okręgu jest punktem przecięcia prostej $x - 3y + 1 = 0$ oraz symetralnej odcinka AB .

Wyznamy współrzędne środka D odcinka AB : $D = \left(\frac{-5+0}{2}, \frac{3+6}{2} \right) = \left(\frac{-5}{2}, \frac{9}{2} \right)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B :

$$a_{AB} = \frac{6-3}{0+5} = \frac{3}{5}.$$

Z warunku prostokątowości prostych wyznaczamy współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB : $a = -\frac{5}{3}$. Wyznamy równanie symetralnej odcinka AB : $y = -\frac{5}{3}x + b$.

Przechodzi ona przez punkt $D = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right)$, stąd otrzymujemy $\frac{9}{2} = -\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) + b$. Zatem $b = \frac{1}{3}$. Wobec tego symetralną odcinka AB jest prosta $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.

Obliczamy współrzędne punktu S , rozwiązując układ równań $\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$ Środkiem

okręgu jest $S = \left(0, \frac{1}{3} \right)$.

Wyznamy promień okręgu r obliczając np.: $|AS| = \sqrt{5^2 + \left(\frac{8}{3} \right)^2} = \frac{17}{3}$.

Wyznamy równanie okręgu o środku w punkcie $S = \left(0, \frac{1}{3} \right)$ i promieniu $r = \frac{17}{3}$:

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{289}{9}.$$

II sposób

Środkiem okręgu jest punkt S , który leży na prostej $x - 3y + 1 = 0$. Zatem $S = (3y - 1, y)$.

Ponieważ $|AS|^2 = |BS|^2$, więc możemy zapisać równanie $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + (y - 6)^2$.

Rozwiązujemy zatem układ równań

$$10x + 6y = 2 \text{ i } x - 3y = -1,$$

otrzymując współrzędne punktu S

$$S = \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Następnie obliczamy kwadrat długości promienia $|SB|^2 = r^2$

$$r^2 = \left(\frac{17}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}.$$

Zatem równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r ma postać $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

III sposób

Przyjmijmy, że punkt $S = (a, b)$ jest środkiem szukanego okręgu. Ponieważ punkt ten leży na prostej $x - 3y + 1 = 0$, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej. Stąd $a - 3b + 1 = 0$.

Okrąg przechodzi przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, zatem

$$\begin{cases} (-5 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6 - b)^2 = r^2. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy zależność między a i b : $5a + 3b - 1 = 0$.

Z układu równań

$$\begin{cases} a - 3b + 1 = 0 \\ 5a + 3b - 1 = 0 \end{cases}$$

obliczamy współrzędne środka okręgu $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Wyznaczone współrzędne podstawiamy

do jednego z równań układu z niewiadomą r i obliczamy kwadrat promienia okręgu:

$$r^2 = \frac{289}{9}.$$

Zatem szukane równanie okręgu ma postać: $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

Schematy punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- wyznaczy współrzędne środka odcinka AB : $D = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$

albo

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej zawierającej odcinek AB : $a_{AB} = \frac{3}{5}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze równanie symetralnej odcinka AB : $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S : $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu): $r = \frac{17}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze współrzędne punktu S w zależności od jednej zmiennej, np.: $S = (3y - 1, y)$

albo

- zapisze równość $|AS|^2 = |BS|^2$ lub równoważne równanie

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y-6)^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze układ równań

$$10x + 6y = 2 \text{ i } x - 3y = -1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S:

$$S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Wyznaczy kwadrat promienia okręgu (lub promień okręgu): $r^2 = \frac{289}{9}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze układ równań:
$$\begin{cases} (-5-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

albo

- zauważy, że współrzędne środka okręgu spełniają równanie: $a - 3b + 1 = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze układ równań:
$$\begin{cases} (-5-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6-b)^2 = r^2 \end{cases}$$
 i zauważy, że współrzędne środka okręgu spełniają równanie $a - 3b + 1 = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S : $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu): $r = \frac{17}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

Uwaga

Jeżeli zdający oblicza współrzędne punktu P przecięcia danej prostej z osią Oy , oblicza odległość PB , zapisuje równanie okręgu i na tym poprzestaje, to otrzymuje **0 punktów**.