

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ 2015/2016

MATEMATYKA POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.9. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $ x + 1 - 2 = 3$, $ x + 3 + x - 5 > 12$.	A

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym. POZIOM PODSTAWOWY 1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. 5.4. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	C
--	---	---

Zadanie 3. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.	D
--	--	---

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.2. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.	C
--	---	---

Zadanie 5. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.	B
--------------------------------	---	---

Zadanie 6. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.2. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.
--	---

Odpowiedź

2	2	5
---	---	---

Zadanie 7. (0–2)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.3. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenie: P_n – pole n -tego kwadratu. Zauważmy, że każdy następny kwadrat jest podobny do poprzedniego w skali $k = \frac{2}{3}$, więc stosunek pól każdych dwóch kolejnych kwadratów jest stały i równy $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Pole obszaru zaznaczonego kolorem czarnym możemy obliczyć następująco: $P = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \dots$

Jest to szereg geometryczny zbieżny, w którym $a_1 = P_1 = (3\sqrt{13})^2 = 117$ oraz $q = -\frac{4}{9}$.

$$\text{Zatem } P = \frac{P_1}{1 - q} = \frac{117}{1 + \frac{4}{9}} = 81.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje **1 pkt**

gdy obliczy pole pierwszego kwadratu $P_1 = 117$ i zauważy, że pole każdego następnego kwadratu stanowi $\frac{4}{9}$ pola kwadratu poprzedniego.

Zdający otrzymuje **2 pkt**

gdy obliczy pole obszaru zaznaczonego kolorem czarnym $P = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \dots = 81$.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenie: P_n – pole n -tego czarnego sześciokąta. Wtedy

$$P_1 = P_{A_1B_1C_1C_2B_2A_2} = (3\sqrt{13})^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{13}\right)^2 = 65.$$

Zauważmy, że każdy następny sześciokąt czarnego koloru jest podobny do poprzedniego w skali $k = \frac{4}{9}$, więc ich pola tworzą nieskończony ciąg geometryczny o ilorazie $q = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$. Zatem pole obszaru zaznaczonego kolorem czarnym możemy obliczyć następująco: $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$

Jest to szereg geometryczny zbieżny, w którym $a_1 = P_1 = 65$ oraz $q = \frac{16}{81}$.

$$\text{Zatem } P = \frac{P_1}{1 - q} = \frac{65}{1 - \frac{16}{81}} = 81.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy obliczy pole pierwszego czarnego sześciokąta $P_1 = 65$ i zauważy, że pole każdego następnego czarnego sześciokąta stanowi $\frac{16}{81}$ pola poprzedniego.

Zdający otrzymuje 2 pkt

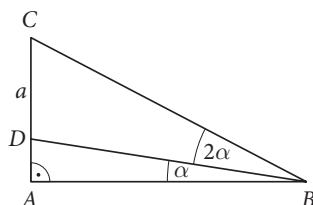
gdy obliczy pole obszaru zaznaczonego kolorem czarnym $P = 81$.

Zadanie 8. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	6.5. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów. 7.5. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Zauważmy, że $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - 3\alpha$.

Z twierdzenia sinusów w trójkącie DAB otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{|BD|}{\sin 2\alpha}$$

Stąd:

$$|AD| = \frac{a \cdot \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = a \frac{\cos(2\alpha + \alpha)}{\sin 2\alpha} = a \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$|AD| = a \frac{\cos \alpha (\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = a \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$|AD| = \frac{a(1 - 4 \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha}$$

co kończy dowód.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zdający zastosuje twierdzenie sinusów w trójkącie DAB i zapisze równość $\frac{|AD|}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{|BD|}{\sin 2\alpha}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

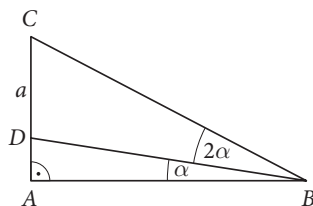
Zdający zastosuje wzory na cosinus sumy kątów, sinus i cosinus podwojonego kąta i zapisze np.

równość $|AD| = a \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$.

Rozwiązanie pełne **3 pkt**

Zdający przekształci wyrażenie do postaci $|AD| = \frac{a(1 - 4\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$.

II sposób



Korzystamy z funkcji tangens w trójkątach prostokątnych CAD i CAB:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|CD|}{|CA|}, \text{ stąd } |CD| = |CA| \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{|BC|}{|CA|}, \text{ stąd } |BC| = |CA| \cdot \operatorname{tg}3\alpha$$

$$|BD| = |BC| - |CD| = |CA| \cdot (\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$$

Przekształcamy wyrażenie

$$\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin 3\alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 3\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha}.$$

Stosujemy wzór $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$ i upraszczamy dalej powyższe wyrażenie:

$$\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos 3\alpha}$$

Wracamy do odcinka BD:

$$a = |BD| = |CA| \cdot (\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha) = |CA| \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\cos 3\alpha}$$

Stąd

$$|CA| = a \cdot \frac{\cos 3\alpha}{2 \sin \alpha}$$

Wyznaczamy teraz długość odcinka CD:

$$|CD| = |CA| \cdot \operatorname{tg}\alpha = a \cdot \frac{\cos 3\alpha}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = a \cdot \frac{\cos 3\alpha}{2 \cos \alpha}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie CAD:

$$|AD|^2 = |CA|^2 + |CD|^2 = \frac{a^2 \cos^2 3\alpha}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = \frac{a^2 \cos^2 3\alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

Dla kąta ostrego α wartości funkcji trygonometrycznych są dodatnie, więc:

$$|AD| = \left| \frac{a \cdot \cos 3\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \right| = \frac{a \cdot \cos 3\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = a \frac{\cos(2\alpha + \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = a \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$|AD| = a \frac{\cos \alpha (\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = a \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$|AD| = \frac{a(1 - 4 \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha}$$

co kończy dowód.

Zamiast korzystać z twierdzenia Pitagorasa, można w trójkącie CAD zastosować definicję sinusa:

$$|AD| = \frac{|CD|}{\sin \alpha}$$

$$|AD| = \frac{a \cdot \frac{\cos 3\alpha}{2 \cos \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{a \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)}{2 \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{a(4(1 - \sin^2 \alpha) - 3)}{2 \sin \alpha}$$

$$|AD| = \frac{a(1 - 4 \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zdający przekształci wyrażenie $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \sin \alpha}{\cos 3\alpha}$ i wyznaczy odcinek $|CA| = a \cdot \frac{\cos 3\alpha}{2 \sin \alpha}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający zastosuje twierdzenie Pitagorasa lub definicję sinusa oraz wzory na cosinus sumy kątów, sinus i cosinus podwojonego kąta i zapisze np. równość $|AD| = a \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$ lub $|AD| = \frac{a \cdot \frac{\cos 3\alpha}{2 \cos \alpha}}{\sin \alpha}$.

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zdający przekształci wyrażenie do postaci $|AD| = \frac{a(1 - 4 \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha}$.

Zadanie 9. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	11.5. Rachunek różniczkowy. Zdający znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych.
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wielomian $f(x) = 3x^{10} - 5x^6 + 3$ jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych

i $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{10} \left(3 - \frac{5}{x^4} + \frac{3}{x^{10}} \right) = \infty$, wystarczy zatem wykazać, że najmniejsza wartość wielomianu f jest dodatnia.

Wyznaczamy pochodną:

$f'(x) = 30x^9 - 30x^5$ i obliczamy jej miejsca zerowe:

$$f'(x) = 0 \iff x^9 - x^5 = 0.$$

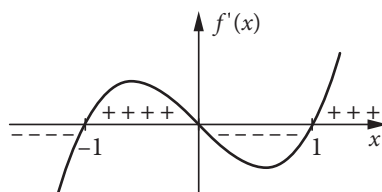
Stąd:

$$x^5(x^4 - 1) = 0$$

$$x^5 = 0 \text{ lub } x^4 = 1$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = -1.$$

Szkicujemy przybliżony wykres znaku pochodnej:



Wielomian f jest funkcją malejącą w każdym z przedziałów $(-\infty, -1)$ oraz $\langle 0, 1)$ i funkcją rosnącą w każdym z przedziałów $\langle -1, 0)$ oraz $\langle 1, \infty)$, więc najmniejszą wartość funkcja osiąga dla $x = -1$ lub $x = 1$.

$f(-1) = f(1) = 3 - 5 + 3 = 1$ – jest to najmniejsza wartość wielomianu, bo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$. Najmniejsza wartość jest dodatnia, zatem wielomian nie ma pierwiastków rzeczywistych, co kończy dowód.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zdający wyznaczy funkcję pochodną: $f'(x) = 30x^9 - 30x^5$ i obliczy jej miejsca zerowe: $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający zbada znak pochodnej i ustali argumenty, dla których wielomian może osiągnąć wartość najmniejszą.

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zdający obliczy wartość najmniejszą i przez fakt, że jest ona dodatnia, udowodni prawdziwość tezy.

II sposób

Korzystamy z twierdzenia Bézouta.

Liczy 1 i -1 są pierwiastkami wielomianu $3x^{10} - 5x^6 + 2$, zatem otrzymujemy:

$$3x^{10} - 5x^6 + 3 = 3x^{10} - 5x^6 + 2 + 1 = (x^2 - 1)(3x^8 + 3x^6 - 2x^4 - 2x^2 - 2) + 1.$$

I dalej:

$$(x^2 - 1)(3x^8 + 3x^6 - 2x^4 - 2x^2 - 2) + 1 = (x^2 - 1)^2(3x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 2) + 1 \geq 1 > 0, \text{ bo parzyste potęgi liczb rzeczywistych są nieujemne.}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zdający zauważy, że $f(x)$ jest funkcją parzystą i wystarczy zajmować się tylko liczbami $x \geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający zapisze równość

$$3x^{10} - 5x^6 + 3 = 3x^{10} - 5x^6 + 2 + 1 = (x^2 - 1)(3x^8 + 3x^6 - 2x^4 - 2x^2 - 2) + 1$$

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zdający obliczy wartość najmniejszą funkcji i przez fakt, że jest ona dodatnia, udowodni prawdziwość tezy.

Zadanie 10. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający: 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

W równaniu mamy funkcję tangens, zakładamy więc, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Następnie przekształcamy równanie:

$$\sin x \cos 3x + \frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x = 0$$

$$\sin x (\cos 3x + \cos x) = 0$$

Stosujemy wzór na sumę cosinusów i zapisujemy równanie w postaci:

$$2 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

Jest ono równoważne alternatywie równań:

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 2x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = 0$$

$$x = k\pi \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi - \text{sprzeczne z założeniem}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Zatem wszystkie liczby rzeczywiste x również możemy zapisać w postaci $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Alternatywne rozwiązanie równania $\sin x (\cos 3x + \cos x) = 0$:

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 3x + \cos x = 0$$

$\cos 3x = -\cos x = \cos(x + \pi)$, więc albo $3x = x + \pi + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k , albo

$3x = -(x + \pi) + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k , co prowadzi do wyniku otrzymanego powyżej.

II sposób

W równaniu mamy funkcję tangens, zakładamy więc, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Przekształcamy równanie do postaci:

$$\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$$

Korzystamy ze wzoru $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$ i zapisujemy równanie:

$$\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin(-2x)) + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\sin 4x - \sin 2x + \sin 2x = 0$$

Otrzymujemy równanie: $\sin 4x = 0$, czyli $4x = k\pi$, skąd $x = k\frac{\pi}{4}$. Wśród uzyskanych rozwiązań znajdują się te, które nie spełniają założenia, zatem ostatecznie $x = k\frac{\pi}{4}$, gdzie k jest liczbą całkowitą i $k \neq 2 + 4n$ dla $n \in \mathbb{C}$.

III sposób

Zakładamy, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Przekształcamy równanie do postaci:

$$\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$$

Zauważmy, że

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x)$$

$$\cos 3x = \cos x (1 - 4 \sin^2 x)$$

Po podstawieniu do równania otrzymujemy:

$$\sin x \cos x (1 - 4 \sin^2 x) + \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \cos x (1 - 4 \sin^2 x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = 0 \quad \text{lub} \quad \sin x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = k\pi \quad \underbrace{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}_{\text{sprzeczne z zał.}} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{lub} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Zatem wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie możemy zapisać w postaci $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Schemat oceniania trzech sposobów

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Zdający zapisze założenie, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i przekształci równanie do postaci $\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający przekształci równanie do postaci

• $2 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$ i rozwiąże je: $\sin x = 0$ lub $\cos 2x = 0$ lub $\cos x = 0$

albo

• $\sin 4x = 0$

albo

• $\sin x \cos x (2 - 4 \sin^2 x) = 0$ i rozwiąże je: $\sin x = 0$ lub $\cos x = 0$ lub $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający poda rozwiązania otrzymanych prostych równań: $x = k\frac{\pi}{4}$, gdzie k jest liczbą całkowitą (lub w innej równoważnej postaci).

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający uwzględni założenie i zapisze wszystkie rozwiązania równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Uwagi

- Jeżeli zdający nie zapisze założenia $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i w rezultacie poda rozwiązania: $x = k\frac{\pi}{4}$, gdzie k jest liczbą całkowitą (lub w innej równoważnej postaci), to otrzymuje **3 punkty**.
- Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci $\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$, a następnie podzieli je obustronnie przez $\sin x$ bez założenia, że $\sin x \neq 0$ i poprawnie rozwiąże równanie $\cos 3x + \cos x = 0$, to otrzymuje **1 punkt**.
- Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci $\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$, a następnie podzieli je obustronnie przez $\sin x$ z założeniem, że $\sin x \neq 0$, poprawnie rozwiąże równanie $\cos 3x + \cos x = 0$, ale nie uwzględni założenia $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ oraz nie rozpatrzy przypadku $\sin x = 0$, to otrzymuje **2 punkty**.
- Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci $\sin x \cos 3x + \sin x \cos x = 0$, a następnie podzieli je obustronnie przez $\sin x$ z założeniem, że $\sin x \neq 0$, poprawnie rozwiąże równanie $\cos 3x + \cos x = 0$, uwzględniając założenie $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ale nie rozpatrzy przypadku $\sin x = 0$, to otrzymuje **3 punkty**.
- Jeżeli zdający poda tylko kilka rozwiązań równania (np. z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$ lub nie uwzględni ich okresowego powtarzania się), to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 11. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	11.3. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi Ox . Zatem $a = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy pochodnej funkcji w punkcie styczności

$P(x_0, f(x_0))$: $a = f'(x_0) = 1$.

Obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{1-x} \right)' = \frac{1-x+x+3}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2}, \quad D_{f'} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ i zapisujemy równanie:}$$

$$\frac{4}{(1-x_0)^2} = 1$$

$$(x_0 - 1)^2 = 4$$

$$x_0 - 1 = 2 \text{ lub } x_0 - 1 = -2$$

$$x_0 = 3 \quad \text{lub} \quad x_0 = -1$$

$$f(x_0) = -3 \quad f(x_0) = 1$$

Istnieją zatem dwie styczne do wykresu funkcji f w punktach $P_1 = (3, -3)$ oraz $P_2 = (-1, 1)$ tworzące z osią Ox kąt 45° .

Wyznaczamy równania stycznych, korzystając ze wzoru $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y + 3 = x - 3 \text{ lub } y - 1 = x + 1,$$

$$y = x - 6 \text{ lub } y = x + 2.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Zdający obliczy współczynnik kierunkowy prostej: $a = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ i wyznaczy funkcję pochodną

$$f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający ułoży równanie $\frac{4}{(1-x)^2} = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający wyznaczy punkty styczności: $P_1 = (3, -3)$ oraz $P_2 = (-1, 1)$.

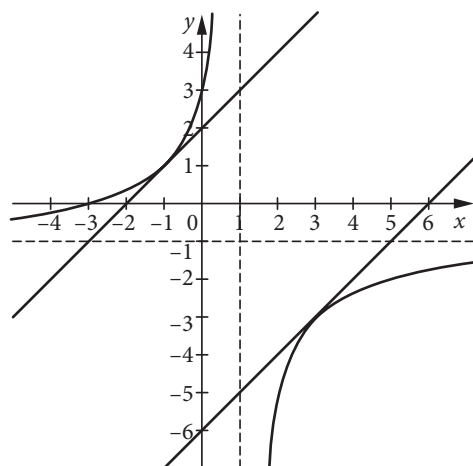
Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający poda równania stycznych: $y = x - 6$, $y = x + 2$.

II sposób

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi Ox . Zatem $a = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, czyli równanie stycznej można zapisać w postaci $y = x + b$.

$$\text{Zauważmy, że } f(x) = \frac{x+3}{1-x} = \frac{-(x-1)-4}{x-1} = \frac{-4}{x-1} - 1, \text{ gdzie } x \neq 1.$$



Wykresem funkcji f jest hiperbola, a styczna do hiperboli ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny, którego współrzędne są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} y = x + b \\ y = \frac{x+3}{1-x} \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{1-x} = x + b$$

$$x^2 + bx - b + 3 = 0$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie (tzn. prosta z hiperbolą ma dokładnie jeden punkt wspólny), gdy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego jest równy zero.

$$\Delta = 0$$

$$b^2 - 4 \cdot (-b + 3) = 0$$

$$b^2 + 4b - 12 = 0$$

$$b = -6 \text{ lub } b = 2$$

Są zatem dwie styczne spełniające warunki zadania: $y = x - 6$, $y = x + 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Zdający obliczy współczynnik kierunkowy prostej: $a = \tan 45^\circ = 1$ i zapisze układ równań $\begin{cases} y = x + b \\ y = \frac{x+3}{1-x} \end{cases}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający wyprowadzi z układu równanie kwadratowe z jedną niewiadomą i parametrem b , np. $x^2 + bx - b + 3 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający zapisze warunek $\Delta = 0$ i obliczy wartości parametrów b , dla których jest on spełniony: $b = -6$ lub $b = 2$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający poda równania stycznych: $y = x - 6$, $y = x + 2$.

Zadanie 12. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.
-----------------------------------	---

Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, czyli kombinacje. Zatem liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego jest równa:

$$|\Omega| = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowano dwie liczby różniące się co najmniej o trzy. Łatwiej wskazać wyniki, które nie sprzyjają zdarzeniu A , dlatego rozważamy zdarzenie przeciwne:

A' – wylosowano dwie liczby różniące się o mniej niż trzy.

Zdarzenie A' jest sumą dwóch wykluczających się zdarzeń:

B_1 – wylosowano dwie liczby różniące się o jeden;

B_2 – wylosowano dwie liczby różniące się o dwa.

Zauważmy, że $B_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \dots, \{n-1, n\}\}$, więc $|B_1| = n-1$,

$B_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \dots, \{n-2, n\}\}$, więc $|B_2| = n-2$.

Zatem $|A'| = |B_1| + |B_2| = 2n-3$, czyli z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}$$

Skoro $P(A) = \frac{7}{12}$, to $P(A') = 1 - P(A) = \frac{5}{12}$.

Układamy równanie:

$$\frac{4n-6}{n^2-n} = \frac{5}{12}$$

$$5n^2 - 5n = 48n - 72$$

$$5n^2 - 53n + 72 = 0$$

które spełniają dwie liczby: $n_1 = \frac{8}{5}$, $n_2 = 9$. Liczba $n_1 = \frac{8}{5}$ nie jest liczbą całkowitą, zatem dla $n = 9$ prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, które różnią się co najmniej o trzy, jest równe $\frac{7}{12}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych $|\Omega| = \binom{n}{2}$

albo

- opíše zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A' .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający poda liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A' : $|A'| = 2n-3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych $|\Omega| = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ i zapisze

$$\text{prawdopodobieństwo } P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}.$$

Rozwiązanie pełne 4 pkt

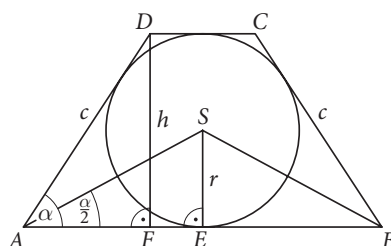
Zdający rozwiąże równanie $\frac{4n-6}{n^2-n} = \frac{5}{12}$, odrzuci rozwiązanie sprzeczne z warunkami zadania i poda odpowiedź: $n = 9$.

Zadanie 13. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. POZIOM PODSTAWOWY 7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.
-----------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Dane:

$$|AS| = |BS| = 10$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest punktem przecięcia dwusiecznych jego kątów wewnętrznych, stąd $|\sphericalangle SAB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle DAB| = \frac{\alpha}{2}$. Ponadto trójkąt ABS jest równoramienny, więc $|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - \alpha$. Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABS otrzymujemy:

$$|AB|^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$|AB|^2 = 200 + 200 \cdot \cos \alpha = 200 + 200 \cdot \frac{3}{5} = 320$$

$$|AB| = 8\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AES obliczamy promień okręgu wpisanego w trapez:

$$r = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{5})^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \text{ więc wysokość trapezu } h = 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Z jedynki trygonometrycznej } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

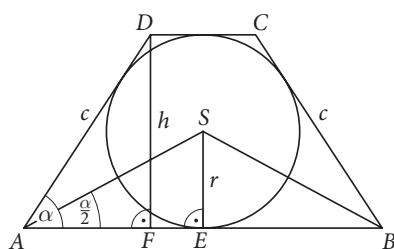
W trójkącie prostokątnym AFD :

$$\sin \alpha = \frac{h}{c}, \text{ stąd } c = 4\sqrt{5} \cdot \frac{5}{4} = 5\sqrt{5}.$$

W ten trapez można wpisać okrąg, więc $|AB| + |CD| = 2c = 10\sqrt{5}$, zatem pole trapezu:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} (|AB| + |CD|) \cdot h = 5\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 100$$

II sposób



Dane:

$$|AS| = |BS| = 10$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest punktem przecięcia dwusiecznych jego kątów wewnętrznych, stąd $|\sphericalangle SAB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle DAB| = \frac{\alpha}{2}$.

Ze wzoru na cosinus podwojonego kąta otrzymujemy:

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{3}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

W trójkącie prostokątnym AES:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{10}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{r}{10}$$

Stąd $r = 2\sqrt{5}$, więc wysokość trapezu $h = 4\sqrt{5}$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AES:

$$|AE|^2 = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}, \text{ więc } |AB| = 8\sqrt{5}.$$

Z jedynki trygonometrycznej $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$, czyli $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, stąd $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.

W trójkącie prostokątnym AFD:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{|AF|}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{h}{|AF|}$$

$$|AF| = 3\sqrt{5}$$

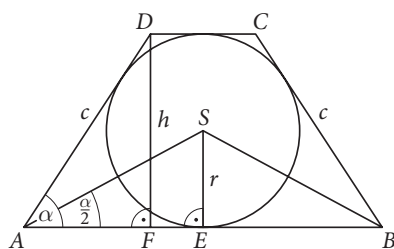
Z własności trapezu równoramiennego:

$$|CD| = |AB| - 2 \cdot |AF| = 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Zatem pole trapezu:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} (|AB| + |CD|) \cdot h = 5\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 100$$

III sposób



Dane:

$$|AS| = |BS| = 10$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

Przyjmijmy oznaczenia: $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = |BC| = c$, $|DF| = h$, $|AF| = x$.

W trójkącie prostokątnym AFD :

$$\cos \alpha = \frac{x}{c}$$

$$x = \frac{3}{5}c$$

W ten trapez można wpisać okrąg, więc:

$$a + b = 2c$$

$$2b + 2x = 2c$$

$$b + \frac{3}{5}c = c$$

$$b = \frac{2}{5}c$$

$$\text{Stąd } |AE| = x + \frac{1}{2}b = \frac{4}{5}c.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AFD :

$$h = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{3}{5}c\right)^2} = \frac{4}{5}c$$

$$\text{Stąd } |ES| = \frac{1}{2}h = \frac{2}{5}c.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AES :

$$|AE|^2 + |ES|^2 = |AS|^2$$

$$\left(\frac{4}{5}c\right)^2 + \left(\frac{2}{5}c\right)^2 = 100$$

$$c = 5\sqrt{5}$$

Ponadto $a + b = 2c = 10\sqrt{5}$, $h = \frac{4}{5}c = 4\sqrt{5}$, więc pole trapezu:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = 5\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 100$$

Schemat oceniania trzech sposobów

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Zdający:

- zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie ABS : $|AB|^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$

albo

- zastosuje wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczy $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

albo

- zastosuje własność czworokąta opisanego na okręgu i zapisze równość $2b + 2x = 2c$ lub wyznaczy wysokość trapezu w zależności od długości ramienia $h = \frac{4}{5}c$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający:

- obliczy długość dolnej podstawy: $|AB| = 8\sqrt{5}$ lub wysokość trapezu: $h = 4\sqrt{5}$

albo

- zapisze równość $b = \frac{2}{5}c$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający:

- obliczy długość dolnej podstawy: $|AB| = 8\sqrt{5}$ lub wysokość trapezu: $h = 4\sqrt{5}$

albo

- zapisze obie równości: $b = \frac{2}{5}c$ i $h = \frac{4}{5}c$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Zdający:

- obliczy długość ramienia trapezu: $c = 5\sqrt{5}$ i sumę długości jego podstaw:

$$|AB| + |CD| = 2c = 10\sqrt{5}$$

albo

- obliczy długość górnej podstawy trapezu: $|CD| = 2\sqrt{5}$

i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędem rachunkowym (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

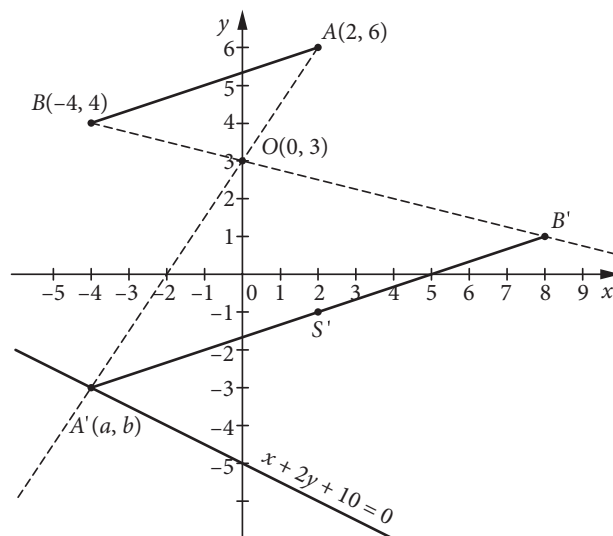
Zdający wyznaczy pole trapezu: $P_{ABCD} = 100$.

Zadanie 14. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.3. Planimetria. Zdający znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 5) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności; 7) oblicza współrzędne oraz długość wektora, dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach. POZIOM PODSTAWOWY 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 6) oblicza odległość dwóch punktów.
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Punkt $A' = (a, b)$ leży na prostej $x + 2y + 10 = 0$, więc $a + 2b + 10 = 0$, stąd $a = -2b - 10$, zatem współrzędne punktu $A' = (-2b - 10, b)$.

Z definicji jednokładności:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'} &= k \cdot \overrightarrow{OA} \\ [-2b - 10, b - 3] &= k \cdot [2, 3]\end{aligned}$$

Z równości wektorów otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} -2b - 10 = 2k \\ b - 3 = 3k \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para $\begin{cases} k = -2 \\ b = -3 \end{cases}$.

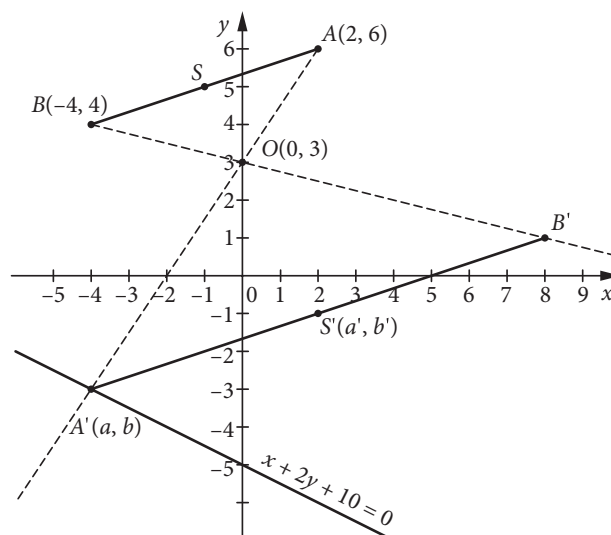
Zatem skala jednokładności $k = -2$ oraz $A' = (-4, -3)$.

Z definicji jednokładności wyznaczamy teraz współrzędne punktu $B' = (b_1, b_2)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB'} &= k \cdot \overrightarrow{OB} \\ [b_1, b_2 - 3] &= -2 \cdot [-4, 1] \\ \begin{cases} b_1 = 8 \\ b_2 = 1 \end{cases} \\ B' &= (8, 1)\end{aligned}$$

Ze wzoru na współrzędne środka odcinka ustalamy współrzędne środka okręgu, którego średnicą jest odcinek $A'B'$: $S' = (2, -1)$ oraz ze wzoru na odległość dwóch punktów obliczamy promień tego okręgu: $r' = |S'B'| = \sqrt{(8-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{40}$, więc równanie tego okręgu: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 40$.

II sposób



Z konstrukcji obrazu punktu w jednokładności wynika, że punkt A' leży na prostej AO , jest zatem punktem przecięcia tej prostej z prostą $x + 2y + 10 = 0$. Wyznaczamy równanie prostej AO : $a = \frac{6-3}{2-0} = \frac{3}{2}$ i $b = 3$, więc $y = \frac{3}{2}x + 3$. Współrzędne punktu A' obliczamy, rozwiązując układ

$$\text{równań: } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ x + 2y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$A' = (-4, -3)$$

Z definicji jednokładności wyznaczamy skalę k :

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$[-4, -6] = k \cdot [2, 3]$$

$$k = -2$$

Przyjmujemy oznaczenia: S – środek okręgu o średnicy AB , r – promień tego okręgu. Wtedy ze wzoru na współrzędne środka odcinka wyznaczamy $S = (-1, 5)$, a ze wzoru na odległość dwóch punktów $r = |SA| = \sqrt{(2+1)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{10}$.

Niech teraz $S' = (a', b')$ – środek okręgu o średnicy $A'B'$, r' – promień tego okręgu. Z własności jednokładności: $r' = |k| \cdot r = 2\sqrt{10}$ oraz $\overrightarrow{OS'} = k \cdot \overrightarrow{OS}$

$$[a', b' - 3] = -2 \cdot [-1, 2]$$

$$a' = 2, b' = -1, \text{ czyli } S' = (2, -1)$$

Zatem równanie okręgu o średnicy $A'B'$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 40$.

Schemat oceniania obu sposobów

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

- wykorzysta fakt, że punkt A' należy do prostej $x + 2y + 10 = 0$, i zapisze jego współrzędne z jedną niewiadomą, np. $A' = (-2b - 10, b)$

albo

- wyznaczy współrzędne środka i promień okręgu o średnicy AB : $S = (-1, 5)$, $r = \sqrt{10}$ lub zapisze układ równań, z którego można obliczyć współrzędne punktu A' :
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ x + 2y + 10 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający:

- wykorzysta definicję jednokładności i z równości wektorów zapisze układ, z którego można obliczyć skalę jednokładności i współrzędne punktu A' , np.
$$\begin{cases} -2b - 10 = 2k \\ b - 3 = 3k \end{cases}$$

albo

- rozwiąże układ równań
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ x + 2y + 10 = 0 \end{cases}$$
 i poda współrzędne punktu $A' = (-4, -3)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający wyznaczy współrzędne środka i promień okręgu o średnicy AB : $S = (-1, 5)$, $r = \sqrt{10}$ i obliczy skalę jednokładności $k = -2$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Zdający obliczy współrzędne środka okręgu, którego średnicą jest odcinek $A'B'$: $S' = (2, -1)$, oraz promień tego okręgu: $r' = \sqrt{40}$ i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędem rachunkowym (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zdający poda równanie okręgu o średnicy $A'B'$: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 40$.

Zadanie 15. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$. 3. Równania i nierówności. Zdający: - stosuje wzory Viète'a; - rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; - rozwiązuje układy równań prowadzące do równań kwadratowych; - rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Współrzędne punktów przecięcia prostej z parabolą to pary liczb spełniające układ równań:

$$\begin{cases} y = (a - 3)x + a + 4 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + a + 8 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2ax + a + 8 = (a - 3)x + a + 4 \quad | \cdot 2$$

$$x^2 - 4ax - 2ax + 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 6(a - 1)x + 8 = 0$$

Pierwiastki tego równania są odciętymi x_1, x_2 punktów wspólnych prostej i paraboli. Prosta z parabolą ma dwa punkty wspólne, gdy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego jest większy od zera. Zatem:

$$\begin{aligned}\Delta &> 0 \\ 36(a-1)^2 - 4 \cdot 8 &> 0 \quad |:4 \\ (a-1)^2 &> \frac{8}{9} \\ a &> 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{lub} \quad a < 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ a &\in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \infty\right)\end{aligned}$$

Następnie korzystamy ze wzorów $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ oraz $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ i przekształcamy nierówność $x_1^3 + x_2^3 \leq 9x_1x_2$ do postaci:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) &\leq 9x_1x_2 \\ (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) &\leq 9x_1x_2\end{aligned}$$

Po zastosowaniu wzorów Viète'a otrzymujemy nierówność z niewiadomą a :

$$\begin{aligned}6(a-1)(36(a-1)^2 - 3 \cdot 8) &\leq 9 \cdot 8 \quad |:(9 \cdot 8) \\ (a-1)(3(a-1)^2 - 2) &\leq 1 \\ (a-1)(3a^2 - 6a + 1) &\leq 1 \\ 3a^3 - 9a^2 + 7a - 2 &\leq 0\end{aligned}$$

Rozkładamy wielomian na czynniki, wykorzystując twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych i dzielenie przez dwumian. Otrzymujemy:

$$(a-2)(3a^2 - 3a + 1) \leq 0$$

Jedynym pierwiastkiem tego wielomianu jest $a = 2$, gdyż wyróżnik czynnika kwadratowego jest ujemny. Ponieważ $3a^2 - 3a + 1 \geq 0$, więc nierówność zachodzi dla $a \leq 2$.

Na koniec wyznaczamy iloczyn warunków $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^3 + x_2^3 \leq 9x_1x_2 \end{cases}$.

Ponieważ $a = 2 > 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$, więc dla $a \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\right)$ prosta o równaniu $y = (a-3)x + a + 4$ przecina parabolę o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + a + 8$ w dwóch punktach o odciętych x_1, x_2 tak, że współrzędne punktu $P = (x_1, x_2)$ spełniają nierówność $x^3 + y^3 \leq 9xy$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

Etap I polega na zapisaniu układu równań $\begin{cases} y = (a-3)x + a + 4 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + a + 8 \end{cases}$ i wyprowadzeniu z niego równania kwadratowego z niewiadomą x i parametrem a : $x^2 - 6(a-1)x + 8 = 0$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Etap II polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $a \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, \infty\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga: Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Etap III polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^3 + x_2^3 \leq 9x_1x_2$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za trzeci etap rozwiązania jest następujący:

1 punkt zdający otrzymuje za zastosowanie wzorów skróconego mnożenia i zapisanie nierówności $(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \leq 9x_1x_2$.

2 punkty zdający otrzymuje za zastosowanie wzorów Viète'a i uporządkowanie nierówności z niewiadomą a do postaci $3a^3 - 9a^2 + 7a - 2 \leq 0$.

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności: $a \in (-\infty, 2]$.

Etap IV polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu drugiego i trzeciego:

$$a \in \left(-\infty, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\right).$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany tylko wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etapy II i III rozwiązania albo poprawnie wykona etap II i popełni błędy w rozwiązaniu równania z etapu III, albo gdy popełni błędy w etapie II i dobrze rozwiąże nierówność z etapu III.

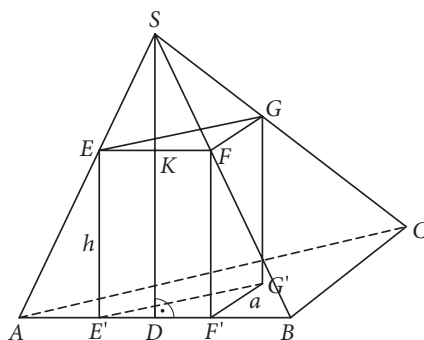
Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania (podanie odpowiedzi) zdający otrzymuje **6 punktów**.

Zadanie 16. (0–7)

III. Modelowanie matematyczne.	9.2. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastopuła lub ostrosłupa płaszczyzną. 11.6. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Graniastopuła $E'F'G'EFG$ jest graniastopułem prawidłowym trójkątnym, gdyż trójkąty ABC i EFG są podobne. Odległość przekroju EFG od płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest równa wysokości tego graniastopuła.

Trójkąt EFS jest podobny do trójkąta ABS , więc:

$$\frac{|EF|}{|AB|} = \frac{|SK|}{|SD|}$$

Oznaczmy $a = |EF|$, a $h = |DK|$. Zatem:

$$\frac{a}{12} = \frac{16-h}{16} \quad | \cdot 48$$

$$4a = 48 - 3h$$

$$h = 16 - \frac{4}{3}a$$

Objętość graniastosłupa jest określona wzorem:

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$V(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \left(16 - \frac{4}{3}a\right)$$

$$V(a) = \sqrt{3} \left(4a^2 - \frac{1}{3}a^3\right), \text{ gdzie } D: a \in (0, 12).$$

Aby zbadać, dla jakiego argumentu objętość jest największa, wyznaczamy pochodną funkcji objętości:

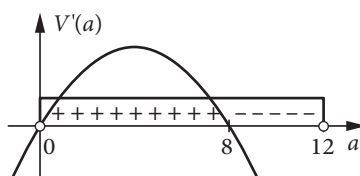
$$V'(a) = \sqrt{3} \cdot (8a - a^2), \quad D' = D = (0, 12)$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$V'(a) = 0 \iff a(8 - a) = 0$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 8$$

Badamy znak pochodnej w dziedzinie:



$V'(a) > 0$ dla $a \in (0, 8)$ oraz $V'(a) < 0$ dla $a \in (8, 12)$.

Zatem objętość $V(a)$ rośnie w przedziale $(0, 8)$ i maleje w przedziale $(8, 12)$. Wynika stąd, że dla $a = 8$ objętość graniastosłupa jest największa.

Obliczamy jeszcze wysokość tego graniastosłupa:

$$h = 16 - \frac{4}{3}a = \frac{16}{3}$$

Zatem przekrój ostrosłupa $ABCS$ musi znajdować się w odległości $\frac{16}{3}$ od jego podstawy.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania można podzielić na trzy etapy.

Etap I składa się z trzech części:

- wybór zmiennej, np. a – krawędź podstawy graniastosłupa, i zapisanie za pomocą tej zmiennej wysokości graniastosłupa: $h = 16 - \frac{4}{3}a$;
- zapisanie objętości graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np. a : $V(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \left(16 - \frac{4}{3}a\right)$;
- określenie dziedziny funkcji V : $a \in (0, 12)$.

Zdający może otrzymać maksymalnie po **1 punkcie** za realizację każdej części tego etapu, przy czym:

- jeżeli w pierwszej części zdający popełni drobny błąd rachunkowy, który utrudnia znacząco dalsze obliczenia, i konsekwentnie poda objętość graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, to otrzymuje **1 punkt** za realizację drugiej części;
- jeżeli w pierwszej części zdający popełni błąd merytoryczny, to otrzymuje **0 punktów** za pierwszą i drugą część tego etapu;
- za poprawne wyznaczenie dziedziny funkcji zgodnej z geometrycznymi warunkami zadania zdający otrzymuje **1 punkt** niezależnie od poprawności realizacji poprzednich części tego etapu.

Etap II składa się z trzech części:

- a) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $V(a)$: $V'(a) = \sqrt{3} \cdot (8a - a^2)$;
- b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $a_1 = 0$, $a_2 = 8$;
- c) uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V osiąga wartość największą dla $a = 8$.

Za poprawne rozwiązanie każdej części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Etap III

Obliczenie wysokości graniastosłupa dla $a = 8$: $h = \frac{16}{3}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania zdający otrzymuje **7 punktów**.