

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-R1**

MAJ 2015

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $ x - a = b$, $ x - a > b$, $ x - a < b$ (R1.1).	D

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.9).	A
--	--	----------

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	C
--	---	----------

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6).	A
--	--	----------

Zadanie 5. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość punktu od prostej (R8.4).	B
--	--	----------

Zadanie 6. (0–2)

Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11n^3 + 6n + 5}{6n^3 + 1} - \frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 - 4} \right)$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.2).
--	---

Odpowiedź

1	4	3
---	---	---

Zadanie 7. (0–2)

Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f . Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (4.10).
--	--

Rozwiązanie (I sposób)

Zapisujemy trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x+1)(x-3), \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Stąd zaś wynika, że

$$\frac{f(6)}{f(12)} = \frac{a \cdot 7 \cdot 3}{a \cdot 13 \cdot 9} = \frac{7}{39}.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje..... 1 p.

gdy wykorzysta postać iloczynową funkcji kwadratowej i zapisze $f(6) = a \cdot 7 \cdot 3$ lub $f(12) = a \cdot 13 \cdot 9$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje..... 2 p.

gdy obliczy wartość $\frac{f(6)}{f(12)} = \frac{7}{39}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Z wzorów Viète'a otrzymujemy $-\frac{b}{a}=2$ oraz $\frac{c}{a}=-3$. Stąd $b=-2a$ oraz $c=-3a$. Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci $f(x)=ax^2-2ax-3a$. Obliczamy wartości funkcji dla argumentów 6 i 12

$$f(6)=36a-12a-3a=21a \text{ oraz } f(12)=144a-24a-3a=117a.$$

Zatem $\frac{f(6)}{f(12)}=\frac{21a}{117a}=\frac{7}{39}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy wykorzysta wzory Viète'a i zapisze $f(6)=36a-12a-3a$ lub $f(12)=144a-24a-3a$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy wartość $\frac{f(6)}{f(12)}=\frac{7}{39}$.

Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

V. Rozumowanie i argumentacja	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne; używa wzory skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$. (R2.6, 2.1).
-------------------------------	--

Rozwiązanie (I sposób)

Przekształćmy nierówność równoważnie w następujący sposób

$$x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x + 1 + 1 > 0,$$

$$(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2 + 1 > 0.$$

Lewa strona tej nierówności jest sumą trzech składników, z których dwa pierwsze są nieujemne, a trzeci dodatni, więc suma ta jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej x .

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze nierówność w postaci, z której lewą stronę łatwo można zapisać w postaci sumy składników nieujemnych: $x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x + 1 + 1 > 0$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2 + 1 > 0$ i nie uzasadni prawdziwości tej nierówności.

Zdający otrzymuje.....3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób)

Przekształćmy nierówność równoważnie w następujący sposób

$$\begin{aligned}
 x^4 - x^2 - 2x + 2 + 1 &> 0, \\
 x^2(x^2 - 1) - 2(x - 1) + 1 &> 0, \\
 x^2(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) + 1 &> 0, \\
 (x - 1)(x^2(x + 1) - 2) + 1 &> 0, \\
 (x - 1)(x^3 + x^2 - 2) + 1 &> 0, \\
 (x - 1)(x^3 - x^2 + 2x^2 - 2) + 1 &> 0, \\
 (x - 1)(x^2(x - 1) + 2(x^2 - 1)) + 1 &> 0 \\
 (x - 1)(x^2(x - 1) + 2(x - 1)(x + 1)) + 1 &> 0, \\
 (x - 1)^2(x^2 + 2(x + 1)) + 1 &> 0, \\
 (x - 1)^2(x^2 + 2x + 1 + 1) + 1 &> 0, \\
 (x - 1)^2((x + 1)^2 + 1) + 1 &> 0.
 \end{aligned}$$

Ponieważ $(x - 1)^2 \geq 0$ oraz $(x + 1)^2 + 1 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x , więc iloczyn $(x - 1)^2((x + 1)^2 + 1)$ jest nieujemny. Stąd wynika, że lewa strona nierówności jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej x .

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje.....1 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $x^2(x^2 - 1) - 2(x - 1) + 1 > 0$.

Zdający otrzymuje.....2 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2) + 1 > 0$ i nie uzasadni prawdziwości tej nierówności.

Zdający otrzymuje.....3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie (III sposób)

Rozważmy wielomian $f(x) = x^4 - x^2 - 2x + 3$.

Pochodna tego wielomianu jest równa $f'(x) = 4x^3 - 2x - 2$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Ponieważ $f'(1) = 4 - 2 - 2 = 0$, więc wielomian f' jest podzielny przez dwumian $x - 1$.

Wykorzystując schemat Hornera, otrzymujemy

	4	0	-2	-2
1	4	4	2	0

Zatem $f'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 2)$. Wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2 + 4x + 2$ jest równy $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 < 0$, współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc $4x^2 + 4x + 2 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wynika stąd, że

$f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 1$,

$f'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > 1$,

$f'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < 1$.

To oznacza, że w punkcie $x = 1$ wielomian f osiąga minimum lokalne, które jest jednocześnie jego najmniejszą wartością, gdyż w przedziale $(-\infty, 1)$ wielomian f jest funkcją malejącą, a w przedziale $(1, +\infty)$ rosnącą.

Ponieważ $f(1) = 1^4 - 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1$, więc $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$, czyli $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x . To kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy obliczy pochodną wielomianu $f(x) = x^4 - x^2 - 2x + 3$, zapisze, że liczba 1 jest pierwiastkiem pochodnej: $f'(x) = 4x^3 - 2x - 2$, $f'(1) = 4 - 2 - 2 = 0$.

Zdający otrzymuje 2 p.

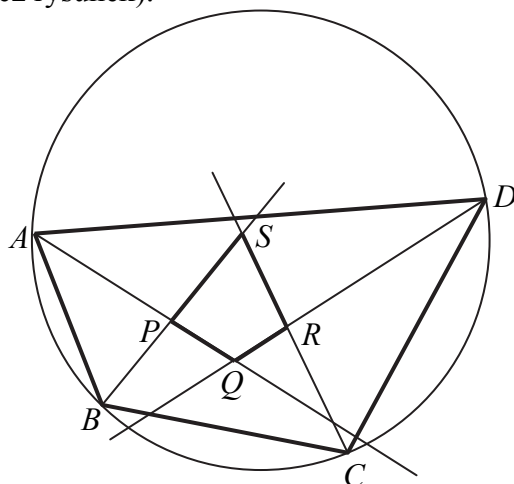
gdy zapisze pochodną w postaci: $f'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 2)$ i zbada znak pochodnej, ale nie przeprowadzi rozumowania do końca lub przeprowadzi je z błędem.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–3)

Dwusieczne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach: P, Q, R, S (zobacz rysunek).



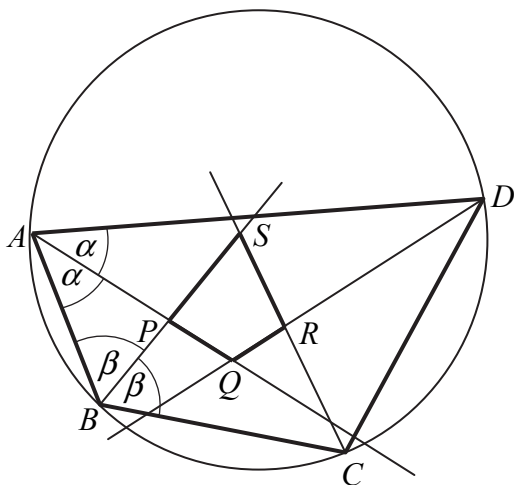
Wykaż, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.

V. Rozumowanie
i argumentacja.

7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R7.1).

Rozwiązanie (I sposób)

Oznaczmy $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$.



Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ADR| = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Zauważmy, że

$$|\sphericalangle AQR| = 180^\circ - (|\sphericalangle DAQ| + |\sphericalangle ADQ|) = 180^\circ - (\alpha + (90^\circ - \beta)) = 90^\circ - \alpha + \beta$$

oraz

$$|\sphericalangle BSR| = 180^\circ - (|\sphericalangle BCR| + |\sphericalangle CBP|) = 180^\circ - ((90^\circ - \alpha) + \beta) = 90^\circ + \alpha - \beta$$

Zatem

$$|\sphericalangle PQR| + |\sphericalangle PSR| = (90^\circ - \alpha + \beta) + (90^\circ + \alpha - \beta) = 180^\circ.$$

Suma wszystkich kątów czworokąta jest równa 360° , więc suma pozostałych dwóch kątów czworokąta $PQRS$ także jest równa 180° . To oznacza, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg, co kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

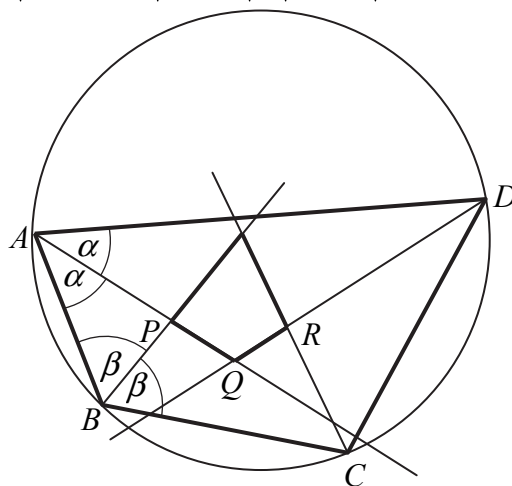
Zdający otrzymuje 1 p.
gdy przyjmie oznaczenia dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ (lub oznaczy połowy tych kątów) np.: $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$, $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$ oraz zapisze dwa pozostałe kąty wewnętrzne tego czworokąta (lub ich połowy) w zależności od α i β :
 $|\sphericalangle BCR| = |\sphericalangle DCR| = 90^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle CDR| = |\sphericalangle ADR| = 90^\circ - \beta$.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy wyznaczy dwa przeciwległe kąty czworokąta $PQRS$ w zależności od α i β :
 $|\sphericalangle AQP| = 90^\circ - \alpha + \beta$, $|\sphericalangle BSC| = 90^\circ + \alpha - \beta$.

Zdający otrzymuje 3 p.
gdy wykaże, że suma dwóch przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta $PQRS$ jest równa 180° .

Rozwiązanie (II sposób)

Oznaczmy $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$.



Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc

$$|\sphericalangle BCR| = |\sphericalangle DCR| = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \text{ oraz } |\sphericalangle CDR| = |\sphericalangle ADR| = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Zauważmy, że

$$|\sphericalangle SPQ| = |\sphericalangle APB| = 180^\circ - (|\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle BAP|) = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

oraz

$$|\sphericalangle SRQ| = |\sphericalangle CRD| = 180^\circ - (|\sphericalangle DCR| + |\sphericalangle CDR|) = 180^\circ - ((90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta)) = \alpha + \beta.$$

Zatem

$$|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta) + \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Suma wszystkich kątów czworokąta jest równa 360° , więc suma pozostałych dwóch kątów czworokąta $PQRS$ także jest równa 180° . To oznacza, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg, co kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**Zdający otrzymuje..... 1 p.**

gdy przyjmie oznaczenia dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ (lub oznaczy połowy tych kątów) np.: $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$, $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$ oraz zapisze dwa pozostałe kąty wewnętrzne tego czworokąta (lub ich połowy) w zależności od α i β : $|\sphericalangle BCR| = |\sphericalangle DCR| = 90^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle CDR| = |\sphericalangle ADR| = 90^\circ - \beta$.

Zdający otrzymuje..... 2 p.

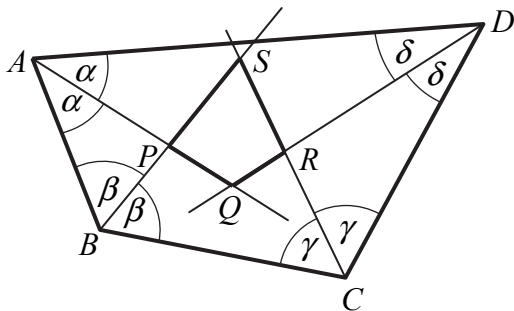
gdy wyznaczy dwa przeciwległe kąty czworokąta $PQRS$ w zależności od α i β : $|\sphericalangle SPQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $|\sphericalangle SRQ| = \alpha + \beta$.

Zdający otrzymuje..... 3 p.

gdy wykaże, że suma dwóch przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta $PQRS$ jest równa 180° .

Rozwiązanie (III sposób)

Oznaczmy: $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DAP| = \alpha$, $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$, $|\sphericalangle DCR| = |\sphericalangle BCR| = \gamma$,
 $|\sphericalangle ADR| = |\sphericalangle CDR| = \delta$.



Suma kątów czworokąta $ABCD$ jest równa

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ.$$

Stąd

$$(1) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Z bilansu kątów w trójkątach ADQ i BCS otrzymujemy

$$|\sphericalangle AQD| = 180^\circ - (\alpha + \delta) \text{ oraz } |\sphericalangle BSC| = 180^\circ - (\beta + \gamma).$$

Suma przeciwległych kątów PQR i PSR czworokąta $PQRS$ jest więc równa

$$|\sphericalangle PQR| + |\sphericalangle PSR| = 180^\circ - (\alpha + \delta) + 180^\circ - (\beta + \gamma) = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

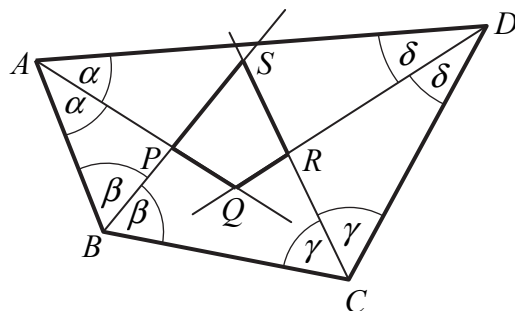
Stąd i z (1) otrzymujemy

$$|\sphericalangle PQR| + |\sphericalangle PSR| = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

To oznacza, że suma pozostałych dwóch kątów czworokąta $PQRS$ także jest równa 180° . Zatem na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg. To kończy dowód.

Rozwiązanie (IV sposób)

Oznaczmy: $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DAP| = \alpha$, $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$, $|\sphericalangle DCR| = |\sphericalangle BCR| = \gamma$,
 $|\sphericalangle ADR| = |\sphericalangle CDR| = \delta$.



Suma kątów czworokąta $ABCD$ jest równa

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ.$$

Stąd

$$(1) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Z bilansu kątów w trójkątach ABP i CDR otrzymujemy

$$|\sphericalangle BPA| = 180^\circ - (\alpha + \beta) \text{ oraz } |\sphericalangle CRD| = 180^\circ - (\gamma + \delta).$$

Kąty BPA i SPQ są wierzchołkowe, podobnie jak kąty CRD i SRQ . Zatem

$$|\sphericalangle SPQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta) \text{ oraz } |\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\gamma + \delta).$$

Suma przeciwnych kątów SPQ i SRQ czworokąta $PQRS$ jest więc równa

$$|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta) + 180^\circ - (\gamma + \delta) = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Stąd i z (1) otrzymujemy

$$|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

To oznacza, że suma pozostałych dwóch kątów czworokąta $PQRS$ także jest równa 180° . Zatem na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg. To kończy dowód.

Schemat oceniania III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy przyjmie oznaczenia kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ (lub oznaczy połowy tych kątów), np.:

$$|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DAP| = \alpha, |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta, |\sphericalangle DCR| = |\sphericalangle BCR| = \gamma, |\sphericalangle ADR| = |\sphericalangle CDR| = \delta$$

i zapisze:

- że ich suma jest równa 360° : $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

albo

- wyznaczy dwa przeciwległe kąty PQR i PSR czworokąta $PQRS$ w zależności od α, β, γ i δ : $|\sphericalangle PQR| = 180^\circ - (\alpha + \delta)$, $|\sphericalangle PSR| = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

albo

- wyznaczy dwa przeciwległe kąty SPQ i SRQ czworokąta $PQRS$ w zależności od α, β, γ i δ : $|\sphericalangle SPQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $|\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\gamma + \delta)$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zapisze, że $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$ oraz

- wyznaczy dwa przeciwległe kąty PQR i PSR czworokąta $PQRS$ w zależności od α, β, γ i δ : $|\sphericalangle PQR| = 180^\circ - (\alpha + \delta)$, $|\sphericalangle PSR| = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

albo

- wyznaczy dwa przeciwległe kąty SPQ i SRQ czworokąta $PQRS$ w zależności od α, β, γ i δ : $|\sphericalangle SPQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $|\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\gamma + \delta)$.

Zdający otrzymuje.....3 p.

gdy wykaże, że suma dwóch przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta $PQRS$ jest równa 180° .

Zadanie 10. (0–4)

Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$.

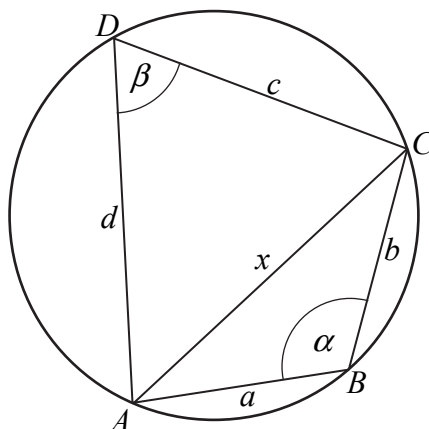
Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

IV. Użycie i tworzenie strategii.

7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.1, R7.5).

Rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy oznaczenia $a = |AB| = 2$, $b = |BC| = 3$, $c = |CD| = 4$, $d = |DA| = 5$, $x = |AC|$, $\alpha = |\sphericalangle ABC|$ jak na rysunku.



Ponieważ na czworokącie $ABCD$ jest opisany okrąg, więc $|\sphericalangle CDA| = 180^\circ - \alpha$.

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \alpha,$$

$$(1) \quad |AC|^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha.$$

Teraz ponownie zastosujemy twierdzenie cosinusów, tym razem do trójkąta ACD :

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 - 2 \cdot |CD| \cdot |DA| \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$(2) \quad |AC|^2 = 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha.$$

Porównujemy prawe strony równań (1) i (2):

$$\begin{aligned} 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha &= 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha, \\ 13 - 12 \cdot \cos \alpha &= 41 + 40 \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = -\frac{28}{52} = -\frac{7}{13}.$$

Podstawiamy otrzymaną wartość do równania (1) i otrzymujemy:

$$|AC|^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{7}{13}\right) = 13 + \frac{84}{13} = \frac{169 + 84}{13} = \frac{253}{13}.$$

Stąd wynika, że długość przekątnej AC jest równa:

$$|AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}.$$

Uwaga

Układ równań (1) i (2) możemy rozwiązać rugując $\cos \alpha$. Wtedy mnożymy obie strony równania (1) przez 10, a obie strony równania (2) przez 3 i mamy

$$10x^2 = 10 \cdot 4 + 10 \cdot 9 - 120 \cdot \cos \alpha \quad \text{oraz} \quad 3x^2 = 3 \cdot 16 + 3 \cdot 25 + 120 \cdot \cos \alpha.$$

Dodając stronami otrzymane równania mamy

$$13x^2 = 253.$$

Stąd

$$x = |AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.

Zdający zapisze równanie wynikające z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABC albo do trójkąta CDA :

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha \quad \text{albo} \quad x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \beta$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.

Zdający zapisze

- równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

albo

- układ równań w postaci:

$$10x^2 = 10 \cdot 4 + 10 \cdot 9 - 120 \cdot \cos \alpha \quad \text{i} \quad 3x^2 = 3 \cdot 16 + 3 \cdot 25 + 120 \cdot \cos \alpha.$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający

- obliczy cosinus kąta ABC : $\cos a = -\frac{7}{13}$

albo

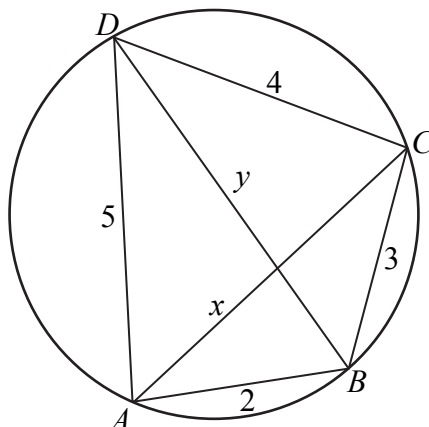
- zapisze równanie z niewiadomą x , np.: $13x^2 = 253$.

Rozwiązanie pełne..... 4 p.

Zdający obliczy długość przekątnej AC : $|AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}.$

Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia $x = |AC|$ $y = |BD|$ jak na rysunku i niech R oznacza promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.



Z twierdzenia Ptolemeusza otrzymujemy równanie

$$xy = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3,$$

$$xy = 23.$$

Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na każdym z trójkątów ABC , BCD , CDA i ABD . Pole czworokąta $ABCD$ możemy zapisać na dwa sposoby

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{CDA} = P_{BCD} + P_{ABD}.$$

Stąd i ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$ otrzymujemy równanie

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot x}{4R} + \frac{4 \cdot 5 \cdot x}{4R} = \frac{2 \cdot 5 \cdot y}{4R} + \frac{3 \cdot 4 \cdot y}{4R},$$

$$26x = 22y,$$

$$y = \frac{13}{11}x.$$

Stąd i z równości $xy = 23$ otrzymujemy

$$x \cdot \frac{13}{11}x = 23,$$

$$x^2 = \frac{23 \cdot 11}{13},$$

$$x = \sqrt{\frac{253}{13}}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze

- równanie wynikające z twierdzenia Ptolemeusza: $xy = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3$

albo

- pole czworokąta $ABCD$ na dwa sposoby i zapisze $P_{ABC} + P_{CDA} = P_{BCD} + P_{ABD}$ lub

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot x}{4R} + \frac{4 \cdot 5 \cdot x}{4R} = \frac{2 \cdot 5 \cdot y}{4R} + \frac{3 \cdot 4 \cdot y}{4R}.$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi x i y :

$$xy = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \text{ oraz } 2 \cdot 3 \cdot x + 4 \cdot 5 \cdot x = 2 \cdot 5 \cdot y + 3 \cdot 4 \cdot y.$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $x \cdot \frac{13}{11} x = 23$ lub $\frac{11}{13} y \cdot y = 23$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy długość przekątnej AC : $x = |AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}$.

Zadanie 11. (0–4)

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (R10.3).
-----------------------------------	---

Rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A - zdarzenie polegające na tym, że z drugiej urny wylosujemy dwie kule białe,

B_1 - zdarzenie polegające na tym, że z pierwszej urny wylosujemy kulę białą.

B_2 - zdarzenie polegające na tym, że z pierwszej urny wylosujemy kulę czarną.

Wówczas $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ oraz $B_1 \cup B_2 = \Omega$. Następnie

$$P(B_1) = \frac{3}{8} > 0 \text{ oraz } P(B_2) = \frac{5}{8} > 0.$$

Zatem spełnione są założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym. Obliczamy teraz prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{15}{22} \text{ oraz } P(A|B_2) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{7}{22}.$$

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymujemy

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{15}{22} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{8} = \frac{45 + 35}{8 \cdot 22} = \frac{80}{8 \cdot 22} = \frac{5}{11}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający opisze zdarzenia A , B_1 i B_2 .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- obliczy prawdopodobieństwa $P(B_1) = \frac{3}{8}$ oraz $P(B_2) = \frac{5}{8}$

albo

- obliczy prawdopodobieństwa $P(A|B_1) = \frac{15}{22}$, $P(A|B_2) = \frac{7}{22}$

albo

- obliczy prawdopodobieństwa $P(B_1) = \frac{3}{8}$ oraz $P(A|B_1) = \frac{15}{22}$

albo

- obliczy prawdopodobieństwa $P(B_2) = \frac{5}{8}$ oraz $P(A|B_2) = \frac{7}{22}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwa: $P(B_1) = \frac{3}{8}$, $P(B_2) = \frac{5}{8}$, $P(A|B_1) = \frac{15}{22}$,

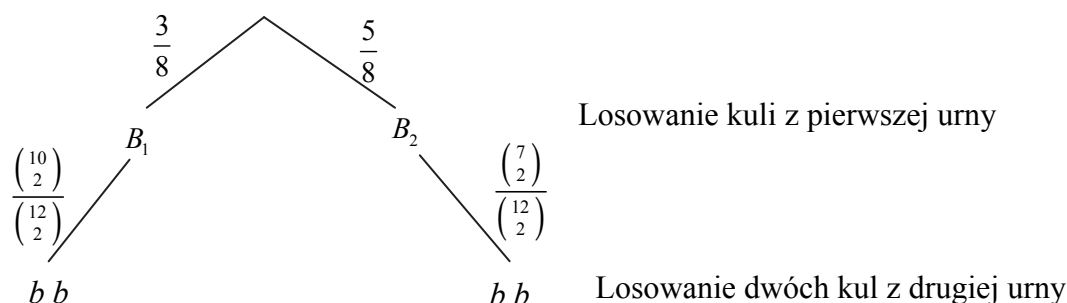
$$P(A|B_2) = \frac{7}{22}.$$

Rozwiązanie pełne..... 4 p.

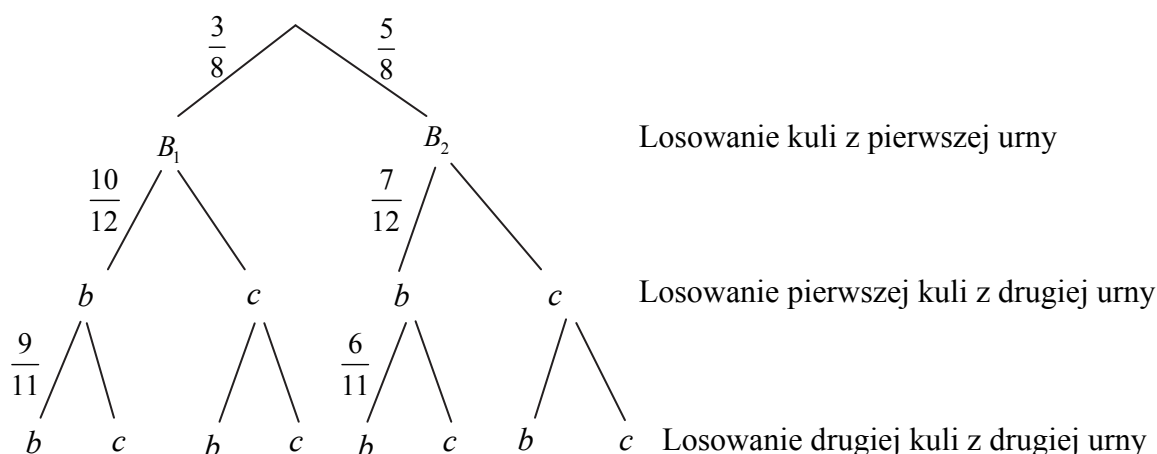
Zdający obliczy prawdopodobieństwo: $P(A) = \frac{5}{11}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy, że A to zdarzenie polegające na tym, że z drugiej urny wylosujemy dwie kule białe. Rysujemy drzewo z istotnymi gałęziami



lub



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{15}{22} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{8} = \frac{45 + 35}{8 \cdot 22} = \frac{80}{8 \cdot 22} = \frac{5}{11}$$

lub

$$P(A) = \frac{\cancel{8}^1}{8^4} \cdot \frac{\cancel{10}^5}{\cancel{12}^4} \cdot \frac{9}{11} + \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{\cancel{12}^2} \cdot \frac{\cancel{6}^1}{11} = \frac{45+35}{16 \cdot 11} = \frac{80}{176} = \frac{5}{11}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający narysuje drzewo ilustrujące losowanie (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze prawdopodobieństwa przynajmniej na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych gałęziach: $\frac{3}{8}, \frac{10}{12}, \frac{9}{11}$

oraz $\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{6}{11}$ lub $\frac{3}{8}, \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}}$ oraz $\frac{5}{8}, \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}}.$

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo: $P(A) = \frac{5}{11}.$

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma prawdopodobieństwo ujemne lub większe od 1, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 12. (0–4)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f , które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.3). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równania prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3).
-----------------------------------	--

Rozwiązanie

Aby styczne były równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$, ich współczynnik kierunkowy musi być równy 4. Obliczamy pochodną funkcji f : $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pierwszej pochodnej funkcji w punkcie styczności. Stąd $4 = f'(x_0)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
 3x_0^2 - 4x_0 &= 4, \\
 3x_0^2 - 4x_0 - 4 &= 0, \\
 \Delta &= 64, \\
 x_0 &= -\frac{2}{3} \text{ lub } x_0 = 2.
 \end{aligned}$$

Istnieją zatem dwie styczne do wykresu funkcji f równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$ w punktach $P_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{27}\right)$ oraz $P_2 = (2, 1)$. Styczne mają zatem równania postaci $y + \frac{5}{27} = 4\left(x + \frac{2}{3}\right)$ oraz $y - 1 = 4(x - 2)$, czyli $y = 4x + \frac{67}{27}$ oraz $y = 4x - 7$.

Odp. Równania prostych stycznych mają postać: $y = 4x + \frac{67}{27}$ oraz $y = 4x - 7$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający

- obliczy pochodną funkcji f : $f'(x) = 3x^2 - 4x$

albo

- zapisze warunek $f'(x_0) = 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.

Zdający obliczy pochodną funkcji f : $f'(x) = 3x^2 - 4x$ i zapisze warunek $f'(x_0) = 4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający rozwiąże równanie $3x_0^2 - 4x_0 = 4$ i obliczy współrzędne obu punktów styczności:

$$P_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{27}\right), P_2 = (2, 1)$$

Uwaga

Jeżeli zdający korzysta ze wzoru $y = f'(x_0)x + b$, gdzie $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, to obliczenie współczynnika b traktujemy jak obliczenie drugiej współrzędnej punktu styczności.

Rozwiązanie pełne..... 4 p.

Wyznaczenie równań stycznych: $y = 4x + \frac{67}{27}$ i $y = 4x - 7$.

Uwaga

Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie współrzędne tylko jednego punktu styczności i w konsekwencji wyznaczy poprawnie równanie jednej stycznej, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 13. (0–5)

Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$.

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1).
--------------------------------	--

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że $m+1 \neq 0$, czyli $m \neq -1$.

Trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli

$$\Delta = (2(m-2))^2 - 4 \cdot (m+1) \cdot (-m+4) > 0,$$

$$8m^2 - 28m > 0,$$

$$4m(2m-7) > 0.$$

Stąd $m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$.

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$ jest zbiorem wszystkich wartości parametru m , dla których funkcja f jest trójmianem kwadratowym i ma dwa różne pierwiastki.

Warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &= (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2), \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(1 - (x_1^2 + x_2^2)) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$x_1 - x_2 = 0 \text{ lub } x_1 + x_2 = 0 \text{ lub } 1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Równość $x_1 - x_2 = 0$ przeczy założeniu $x_1 \neq x_2$.

Ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków trójmianu kwadratowego możemy równanie

$x_1 + x_2 = 0$ zapisać w postaci $\frac{-2(m-2)}{m+1} = 0$. Stąd $m = 2 \notin D$.

Równanie $1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\frac{-2(m-2)}{m+1} \right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} &= 1, \\ \frac{4(m^2 - 4m + 4)}{(m+1)^2} + \frac{2m-8}{m+1} - 1 &= 0, \end{aligned}$$

$$4m^2 - 16m + 16 + (2m-8)(m+1) - (m+1)^2 = 0,$$

$$5m^2 - 24m + 7 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby

$$m_1 = \frac{12 - \sqrt{109}}{5} \notin D \text{ oraz } m_2 = \frac{12 + \sqrt{109}}{5} \in D.$$

Istnieje zatem jedna wartość parametru $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$, dla której trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu równania $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie równania w postaci:

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(1 - (x_1^2 + x_2^2)) = 0 \text{ lub równoważnej.}$$

2 punkty zdający otrzymuje za:

- zapisanie równości $x_1 - x_2 = 0$ i stwierdzenie, że przeczy ona założeniu $x_1 \neq x_2$ albo

- rozwiązanie równania $\frac{-2(m-2)}{m+1} = 0$: $m = 2$

albo

- zapisanie równania $1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$ w postaci, np.: $\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} = 1$.

3 punkty zdający otrzymuje za:

- rozwiązanie równania $\frac{-2(m-2)}{m+1} = 0$: $m = 2$

oraz

- rozwiązanie równania $\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} = 1$: $m_1 = \frac{12 - \sqrt{109}}{5}$,

$$m_2 = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}.$$

Trzeci etap polega na wyznaczeniu szukanej wartości parametru m : $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$. Za ten

etap zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprawnie wykona etapy I i II rozwiązania albo poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu równania z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże równanie z etapu II.

Uwagi:

1. Akceptujemy rozwiązania, w których zdający nie zapisuje założenia $m+1 \neq 0$, które wynika ze sformułowania zadania.
2. Zdający nie musi rozwiązywać nierówności $\Delta > 0$, o ile sprawdzi czy dla $m=2$, $m = \frac{12-\sqrt{109}}{5}$, $m = \frac{12+\sqrt{109}}{5}$ trójmian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.
3. Jeżeli zdający podzieli obie strony równania $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$ przez $x_1^2 - x_2^2$ bez stosownego założenia i rozwiąże równanie $1 = x_1^2 + x_2^2$, otrzymując $m = \frac{12-\sqrt{109}}{5}$ lub $m = \frac{12+\sqrt{109}}{5}$, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, przy czym **1 punkt** może otrzymać za rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$, **1 punkt** za zapisanie równania $1 = x_1^2 + x_2^2$ w postaci równania wymiernego z jedną niewiadomą, np.: $\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} = 1$ oraz **1 punkt** za wyznaczenie tego rozwiązania równania, które spełnia nierówność $\Delta > 0$.
4. Jeżeli zdający nie rozwiązywał nierówności $\Delta > 0$, ale rozwiązał równanie $\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} = 1$ i sprawdził, dla której z otrzymanych wartości m trójmian ma pierwiastki rzeczywiste, to otrzymuje **3 punkty**.

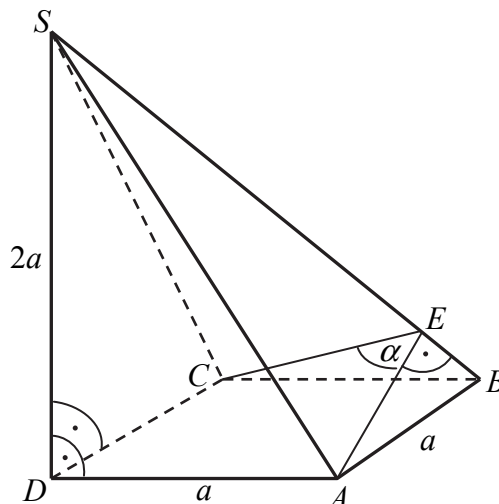
Zadanie 14. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).
-----------------------------------	--

Rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa $|AC| = a\sqrt{2}$.

Trójkąty ADS i CDS są przystające (oba są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną DS oraz $|AD| = |CD|$), więc krawędzie boczne AS i CS ostrosłupa mają tę samą długość.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Trójkąt ABS jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa

$$|SB| = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 + a^2} = a\sqrt{6}.$$

Odcinek AE jest wysokością ściany bocznej ABS . Jego długość możemy wyznaczyć zapisując np. pole trójkąta ABS na dwa sposoby

$$\frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2} a\sqrt{6} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = a\sqrt{\frac{5}{6}} = |CE|.$$

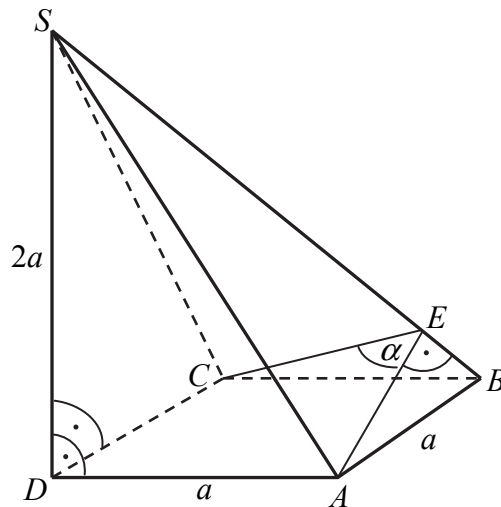
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AEC otrzymujemy

$$2a^2 = \frac{5}{6}a^2 + \frac{5}{6}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}a^2 \cos \alpha.$$

Stąd $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$. Zatem $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa $|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$.

Trójkąty ADS i CDS są przystające (oba są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną DS oraz $|AD| = |CD|$), więc krawędzie boczne AS i CS ostrosłupa mają tę samą długość.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Trójkąt BDS jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa

$$|SB| = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

Odcinek AE jest wysokością ściany bocznej ABS . Jego długość możemy wyznaczyć zapisując np. pole trójkąta ABS na dwa sposoby

$$\frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2} a\sqrt{6} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = a\sqrt{\frac{5}{6}} = |CE|.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AEC otrzymujemy

$$2a^2 = \frac{5}{6}a^2 + \frac{5}{6}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}a^2 \cos \alpha.$$

Stąd $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$. Zatem $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Rozwiązanie (III sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa $|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$.

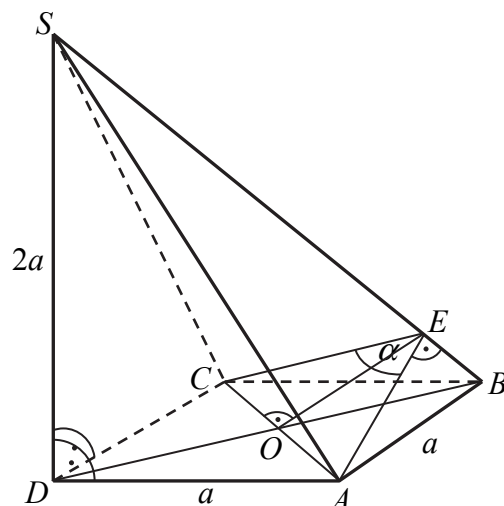
Trójkąty ADS i CDS są przystające (oba są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną DS oraz $|AD| = |CD|$), więc krawędzie boczne AS i CS ostrosłupa mają tę samą długość.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Trójkąt BDS jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa

$$|SB| = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$



Odcinek AE jest wysokością ściany bocznej ABS . Jego długość możemy wyznaczyć zapisując np. pole trójkąta ABS na dwa sposoby

$$\frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2}a\sqrt{6} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = a\sqrt{\frac{5}{6}} = |CE|.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{5}{6}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

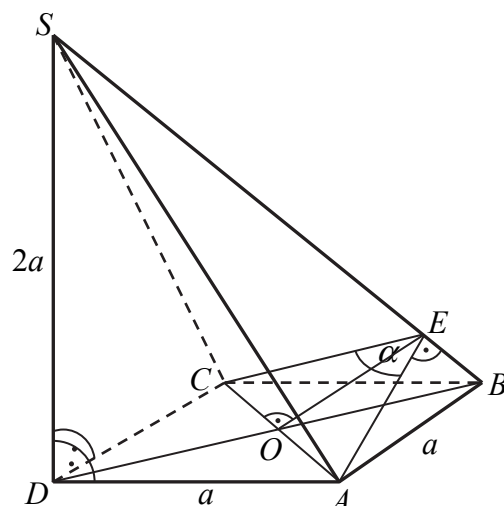
Zatem cosinus.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Rozwiązanie (IV sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa $|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$.

Trójkąty ADS i CDS są przystające (oba są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną DS oraz $|AD| = |CD|$), więc krawędzie boczne AS i CS ostrosłupa mają tę samą długość.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Trójkąt BDS jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa

$$|SB| = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

Odcinek AE jest wysokością ściany bocznej ABS . Jego długość możemy wyznaczyć zapisując np. pole trójkąta ABS na dwa sposoby

$$\frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2} a\sqrt{6} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = a\sqrt{\frac{5}{6}} = |CE|.$$

Odcinek OE jest wysokością trójkąta AEC , więc $|OE| = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pole trójkąta AEC możemy zapisać na dwa sposoby

$$\frac{1}{2} |AE| \cdot |CE| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} |AC| \cdot |OE|,$$

czyli

$$\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot a\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Stąd

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- wyznaczy długości krawędzi bocznych SA , SC i SB ostrosłupa $ABCD$:
 $|SA| = |SC| = a\sqrt{5}$, $|SB| = a\sqrt{6}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnienie błędów.
- zaznaczy poprawnie kąt między ścianami ABS i CBS .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- wyznaczy długość odcinka AE : $|AE| = |CE| = a\sqrt{\frac{5}{6}}$

albo

- zapisze jedną z funkcji trygonometrycznych połowy kąta α : np. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|AO|}{|AE|}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- zapisze równanie wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AEC :
 $2a^2 = \frac{5}{6}a^2 + \frac{5}{6}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}a^2 \cos \alpha$

albo

- obliczy sinus połowy kąta α : $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

albo

- obliczy wysokość OE trójkąta ACE : $|OE| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający

- obliczy cosinus kąta AEC : $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć $\sin \alpha$: $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot a\sqrt{\frac{5}{6}} \sin \alpha = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Rozwiązanie pełne 5 p.

Wyznaczenie sinusa kąta AEC : $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Uwaga

Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między ścianami bocznymi ABS i BCS , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za wyznaczenie długości krawędzi bocznych.

Zadanie 15. (0–6)

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a , b i c . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). 13. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$ (3.7).
-----------------------------------	---

Rozwiązanie (I sposób)

Suma współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa $1 + a + b + c = 0$. Niech p oznacza najmniejszy pierwiastek wielomianu W . Ponieważ pierwiastki wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3, więc pozostałe dwa pierwiastki są równe $p + 3$ oraz $p + 6$.

a) Wielomian możemy więc zapisać w postaci iloczynowej

$$W(x) = (x - p)(x - p - 3)(x - p - 6).$$

Stąd

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2 - px - 3x - px + p^2 + 3p)(x - p - 6), \\ W(x) &= x^3 - px^2 - 6x^2 - px^2 + p^2x + 6px + p^2x - p^3 - 6p^2 + 3px - 3p^2 - 18p, \\ W(x) &= x^3 + (-3p - 9)x^2 + (3p^2 + 18p + 18)x + (-p^3 - 9p^2 - 18p). \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki wielomianu, otrzymując układ równań:

$$\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \end{cases}$$

b) Możemy zapisać układ równań

$$\begin{cases} p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \\ (p + 3)^3 + a(p + 3)^2 + b(p + 3) + c = 0 \\ (p + 6)^3 + a(p + 6)^2 + b(p + 6) + c = 0 \end{cases}$$

Stąd po przekształceniach, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \end{cases}$$

c) Korzystając ze wzorów Viète'a $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = b \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \end{cases}$, możemy zapisać układ

równań, otrzymując kolejno

$$\begin{cases} p+p+3+p+6=-a \\ p \cdot (p+3)+p \cdot (p+6)+(p+3) \cdot (p+6)=b \\ p \cdot (p+3) \cdot (p+6)=-c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-3p-9 \\ b=3p^2+18p+18 \\ c=-p^3-9p^2-18p \end{cases}$$

Stąd i z równości $1+a+b+c=0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (-3p-9)+(3p^2+18p+18)+(-p^3-9p^2-18p)+1 &= 0, \\ p^3+6p^2+3p-10 &= 0. \end{aligned}$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem tego równania, więc z twierdzenia Bézouta wynika, że wielomian $p^3+6p^2+3p-10$ jest podzielny przez dwumian $p-1$.

Wykonujemy dzielenie, stosując np. schemat Hornera.

	1	6	3	-10
1	1	7	10	0

Równanie możemy więc zapisać w postaci $(p-1)(p^2+7p+10)=0$.

Pozostałe rozwiązania równania $p^3+6p^2+3p-10=0$ to pierwiastki trójmianu kwadratowego $p^2+7p+10$, czyli liczby $p=-5$, $p=-2$.

Gdy $p=1$, to wtedy $a=-12$, $b=39$, $c=-28$.

Gdy $p=-5$, to wtedy $a=6$, $b=3$, $c=-10$.

Gdy $p=-2$, to wtedy $a=-3$, $b=-6$, $c=8$.

Odpowiedź: Współczynniki a , b , c są równe: $\begin{cases} a=-12 \\ b=39 \\ c=-28 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=-3 \\ b=-6 \\ c=8 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ c=-10 \end{cases}$

Rozwiązanie (II sposób)

Z równości $1+a+b+c=0$ otrzymujemy $c=-1-a-b$. Wielomian W możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3+ax^2+bx-1-a-b, \\ W(x) &= x^3-1+ax^2-a+bx-b, \\ W(x) &= (x-1)(x^2+x+1)+a(x^2-1)+b(x-1), \\ W(x) &= (x-1)(x^2+(a+1)x+a+b+1). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że liczba $x=1$ jest pierwiastkiem wielomianu W .

Dalszą część rozwiązania możemy przeprowadzić na dwa sposoby

- a) Pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3, więc mamy trzy takie ciągi $(1,4,7)$, $(-2,1,4)$, $(-5,-2,1)$. Wielomian możemy wówczas zapisać

w postaci iloczynowej, odpowiednio:

$$W(x) = (x-1)(x-4)(x-7), \quad W(x) = (x+2)(x-1)(x-4), \quad W(x) = (x+5)(x+2)(x-1).$$

Po doprowadzeniu do postaci uporządkowanej mamy

$$W(x) = x^3 - 12x^2 + 39x - 28, \quad W(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8, \quad W(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10.$$

Wyznaczamy odpowiednio współczynniki wielomianu W :

$$(a = -12, b = 39, c = -28) \text{ lub } (a = -3, b = -6, c = 8) \text{ lub } (a = 6, b = 3, c = -10).$$

b) Niech x_1 i x_2 oznaczają pierwiastki trójmianu $T(x) = x^2 + (a+1)x + a+b+1$. Możemy założyć, że $x_1 \leq x_2$. Pierwiastki wielomianu W tworzą ciąg arytmetyczny, więc z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy np.:

$$(x_1 = 4, x_2 = 7) \text{ lub } (x_1 = -2, x_2 = 4) \text{ lub } (x_1 = -5, x_2 = -2)$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, otrzymujemy trzy układy równań

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4+7=-(a+1) \\ 4 \cdot 7 = a+b+1 \end{cases} & \text{ lub } \begin{cases} -2+4=-(a+1) \\ -2 \cdot 4 = a+b+1 \end{cases} & \text{ lub } \begin{cases} -5-2=-(a+1) \\ -5 \cdot (-2) = a+b+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 11=-(a+1) \\ 28 = a+b+1 \end{cases} & \text{ lub } \begin{cases} 2=-(a+1) \\ -8 = a+b+1 \end{cases} & \text{ lub } \begin{cases} -7=-(a+1) \\ 10 = a+b+1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -12 \\ b = 39 \end{cases} & \text{ lub } \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \end{cases} & \text{ lub } \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Obliczamy odpowiednio $c = -1 - a - b$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = -12 \\ b = 39 \\ c = -28 \end{cases} & \text{ lub } \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases} & \text{ lub } \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -10 \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązanie (III sposób)

Suma współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa $1 + a + b + c = 0$.

Z równości $1 + a + b + c = 0$ wynika, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W .

Ponieważ pierwiastki wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3, to możemy zapisać trzy ciągi arytmetyczne, których jednym z wyrazów jest liczba 1: $(1, 4, 7)$, $(-2, 1, 4)$, $(-5, -2, 1)$.

Stąd wielomian W możemy więc zapisać w postaci:

$$W(x) = (x-1)(x-4)(x-7) \text{ lub } W(x) = (x+2)(x-1)(x-4),$$

$$\text{lub } W(x) = (x+5)(x+2)(x-1)$$

Po doprowadzeniu do postaci uporządkowanej mamy

$$W(x) = x^3 - 12x^2 + 39x - 28 \text{ lub } W(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8, \text{ lub } W(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10.$$

Wyznaczamy współczynniki wielomianu W :

$$(a = -12, b = 39, c = -28) \text{ lub } (a = -3, b = -6, c = 8), \text{ lub } (a = 6, b = 3, c = -10).$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze wielomian W w postaci iloczynowej, np.: $W(x) = (x-p)(x-p-3)(x-p-6)$, gdzie p jest pierwiastkiem wielomianu

albo

- zapisze układ równań, gdzie p jest pierwiastkiem wielomianu

$$\begin{cases} p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \\ (p+3)^3 + a(p+3)^2 + b(p+3) + c = 0 \\ (p+6)^3 + a(p+6)^2 + b(p+6) + c = 0 \end{cases}$$

albo

- zapisze układ równań, korzystając ze wzorów Viète'a

$$\begin{cases} p + p + 3 + p + 6 = -a \\ p \cdot (p+3) + p \cdot (p+6) + (p+3) \cdot (p+6) = b \\ p \cdot (p+3) \cdot (p+6) = -c \end{cases}$$

albo

- wyznaczy $c = -1 - a - b$ i zapisze wielomian W w postaci $W(x) = x^3 - 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1)$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze

- układ równań:
$$\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \end{cases}$$

albo

- wielomian W w postaci iloczynu: $W(x) = (x-1)(x^2 + (a+1)x + a+b+1)$

albo

- zapisze, że z równości $1 + a + b + c = 0$ wynika, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W

albo

- zapisze układ czterech równań z 4 niewiadomymi, np.

$$\begin{cases} p + p + 3 + p + 6 = -a \\ p \cdot (p+3) + p \cdot (p+6) + (p+3) \cdot (p+6) = b \\ p \cdot (p+3) \cdot (p+6) = -c \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności4 p.

Zdający

- wyznaczy wszystkie rozwiązania równania $p^3 + 6p^2 + 3p - 10 = 0$: $1, -2, -5$

albo

- zauważy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W i zapisze trzy ciągi arytmetyczne o różnicy 3, których jednym z wyrazów jest liczba 1:
 $(1, 4, 7), (-2, 1, 4), (-5, -2, 1)$

albo

- zauważy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W i zapisze jeden ciąg arytmetyczny o różnicy 3, w którym jednym z wyrazów jest liczba 1:
np. $(1, 4, 7)$ lub $(-2, 1, 4)$, lub $(-5, -2, 1)$ i dla tego ciągu obliczy współczynniki a, b, c wielomianu, to otrzymuje **4 punkty**.

Uwagi:

- Jeżeli zdający wyznaczy jeden z pierwiastków wielomianu W i wykorzystuje informację, że pierwiastki wielomianu są **kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego**, to otrzymuje **3 punkty**.
- Jeżeli zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np. $p^3 + 6p^2 + 3p - 10 = 0$, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają lub poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)5 p.

Zdający

- rozwiąże zadanie do końca, popełniając błędy rachunkowe

albo

- zapisze, że z równości $1 + a + b + c = 0$ wynika, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W , zapisze trzy ciągi arytmetyczne o różnicy 3, których jednym z wyrazów jest liczba 1: $(1, 4, 7), (-2, 1, 4), (-5, -2, 1)$ oraz zapisze, że
 $W(x) = (x-1)(x-4)(x-7)$ lub $W(x) = (x+2)(x-1)(x-4)$,
lub $W(x) = (x+5)(x+2)(x-1)$.

albo

- wyznaczy współczynniki a, b, c wielomianu tylko dla dwóch ciągów

Rozwiązanie pełne6 p.

Zdający wyznaczy współczynniki wielomianu W : $(a = -12, b = 39, c = -28)$ lub $(a = -3, b = -6, c = 8)$, lub $(a = 6, b = 3, c = -10)$.

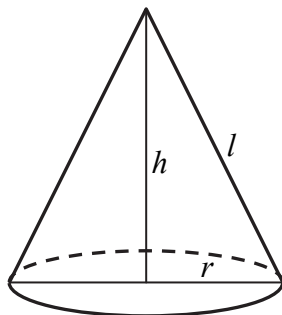
Zadanie 16. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).
--------------------------------	--

Rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Objętość stożka wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h.$$

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym, którego obwód jest równy 20, więc

$$2r + 2l = 20,$$

$$r + l = 10,$$

$$l = 10 - r.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$r^2 + h^2 = l^2,$$

$$r^2 = l^2 - h^2,$$

$$r^2 = (10 - r)^2 - h^2,$$

$$h^2 = 100 - 20r.$$

Zatem $h = \sqrt{100 - 20r}$.

Z geometrycznych warunków zadania otrzymujemy $0 < r < 5$.

Zapisujemy objętość stożka w zależności od zmiennej r

$$V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{100 - 20r},$$

Wzór tej funkcji zapiszemy w postaci $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \sqrt{100r^4 - 20r^5}$ dla $0 < r < 5$.

Rozważmy funkcję pomocniczą określoną wzorem $f(r) = 100r^4 - 20r^5$ dla $0 < r < 5$.

Z faktu, że funkcja $g(t) = \sqrt{t}$ jest rosnąca w $\langle 0, +\infty \rangle$ wynika, że funkcje V oraz f są rosnące (malejące) w tych samych przedziałach oraz mają ekstrema lokalne (tego samego rodzaju) dla tych samych argumentów.

Wyznaczamy wartość największą funkcji f w przedziale $(0, 5)$.

Obliczamy pochodną funkcji f :

$$f'(r) = 400r^3 - 100r^4$$

W przedziale $(0, 5)$ pochodna ma jedno miejsce zerowe $r = 4$. Ponadto

$$f'(r) > 0 \text{ dla } r \in (0, 4),$$

$$f'(r) < 0 \text{ dla } r \in (4, 5).$$

Wynika stąd, że dla $x = 4$ funkcja f ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą wartością funkcji V , bo w przedziale $(0, 4)$ funkcja f jest rosnąca, a przedziale $(4, 5)$ funkcja f jest malejąca.

Gdy $r = 4$, to $h = \sqrt{100 - 20 \cdot 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, natomiast objętość stożka jest wówczas równa:

$$V(4) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \sqrt{100 - 20 \cdot 4} = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Odp.: Największą objętość równą $\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$ ma stożek o promieniu podstawy 4 i wysokości $2\sqrt{5}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- oznaczenia promienia podstawy stożka, np. r i wyznaczenia wysokości stożka w zależności od zmiennej r : $h = \sqrt{100 - 20r}$.
- zapisania objętości V stożka jako funkcji jednej zmiennej $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{100 - 20r}$,
- zapisania dziedziny funkcji $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{100 - 20r}$: $0 < r < 5$.

Za drugą część tego etapu zdający może otrzymać punkt, o ile pierwszą część wykona bezbłędnie. Punkt za część trzecią otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części tego etapu.

Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenia wzoru pochodnej funkcji $f(r) = 100r^4 - 20r^5$: $f'(r) = 400r^3 - 100r^4$,
- obliczenia miejsc zerowych pochodnej: $r_1 = 0$, $r_2 = 4$,
- zbadania znaku pochodnej funkcji f : $f'(r) > 0$ dla $r \in (0, 4)$, $f'(r) < 0$ dla $r \in (4, 5)$ i zapisania, że dla $r = 4$ funkcja V osiąga największą wartość.

Uwagi:

1. Znak pochodnej zdający może zaznaczyć w inny sposób, np. na rysunku szkicując krzywą zbliżoną do wykresu pochodnej.

2. Jeśli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji V lub określi funkcję f na zbiorze szerszym od dziedziny funkcji V , to punkt za tę część może otrzymać jedynie wtedy, gdy wskazuje jako największą wartość funkcji tylko to maksimum, które funkcja f osiąga dla argumentu z dziedziny funkcji V .

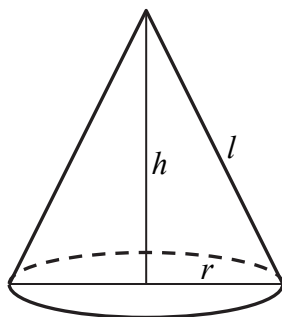
Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Trzeci etap

Zapisać, że promień stożka o największej objętości jest równy $r=4$, wysokość $h=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ i obliczenie największej objętości stożka $V(4)=\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$. Za realizację tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Objętość stożka wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h.$$

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym, którego obwód jest równy 20, więc

$$2r + 2l = 20,$$

$$r + l = 10,$$

$$l = 10 - r.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$r^2 + h^2 = l^2,$$

$$r^2 = l^2 - h^2,$$

$$r^2 = (10 - r)^2 - h^2,$$

$$h^2 = 100 - 20r.$$

$$\text{Zatem } r = \frac{100 - h^2}{20} = 5 - \frac{1}{20}h^2.$$

Z geometrycznych warunków zadania otrzymujemy $0 < h < 10$. Zapisujemy objętość stożka w zależności od zmiennej h

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(5 - \frac{1}{20}h^2 \right)^2 h,$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(25 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{400}h^4 \right) \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \left(25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5 \right) \text{ dla } 0 < h < 10.$$

Zauważamy, że wystarczy zbadać funkcję $f(h) = 25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5$ określoną w przedziale $(0, 10)$. Funkcje V oraz f są rosnące (malejące) w tych samych przedziałach oraz mają ekstrema lokalne (tego samego rodzaju) dla tych samych argumentów. Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(h) = 25 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{80}h^4.$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$\begin{aligned} 25 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{80}h^4 &= 0 \text{ i } t = h^2 \\ \frac{1}{80}t^2 - \frac{3}{2}t + 25 &= 0 \\ \Delta &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{80} \cdot 25 = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1 \\ t_1 &= \frac{\frac{3}{2} - 1}{2 \cdot \frac{1}{80}} = 20, \quad t_2 = \frac{\frac{3}{2} + 1}{2 \cdot \frac{1}{80}} = 100 \\ h^2 &= 20 \text{ lub } h^2 = 100, \\ h &= -2\sqrt{5}, h = 2\sqrt{5}, h = -10, h = 10. \end{aligned}$$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej funkcji f , które należy do przedziału $(0, 10)$ jest $h = 2\sqrt{5}$.

Ponadto:

$$\begin{aligned} f'(h) &> 0 \text{ gdy } h \in (0, 2\sqrt{5}), \\ f'(h) &< 0 \text{ gdy } h \in (2\sqrt{5}, 10). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że dla $h = 2\sqrt{5}$ funkcja f osiąga maksimum lokalne i jest to jednocześnie wartość największa, bo w przedziale $(0, 2\sqrt{5})$ funkcja f jest rosnąca, a przedziale $(2\sqrt{5}, 10)$ funkcja f jest malejąca.

Gdy $h = 2\sqrt{5}$, to $r = 5 - \frac{1}{20}(2\sqrt{5})^2 = 4$ i objętość stożka jest wówczas równa:

$$V(2\sqrt{5}) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Odp.: Największą objętość równą $\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$ ma stożek, którego promień jest równy 4, a wysokość $2\sqrt{5}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- oznaczenia wysokości stożka, np. h i wyznaczenia promienia podstawy stożka

w zależności od zmiennej h : $r = \frac{100 - h^2}{20} = 5 - \frac{1}{20}h^2$,

- zapisania objętości V stożka jako funkcji jednej zmiennej

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(25 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{400}h^4 \right) \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \left(25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5 \right),$$

- zapisania dziedziny funkcji $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5 \right)$: $0 < h < 10$.

Za drugą część tego etapu zdający może otrzymać punkt, o ile pierwszą część wykona bezbłędnie. Punkt za część trzecią otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części tego etapu.

Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenia wzoru pochodnej funkcji $f(h) = 25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5$:

$$f'(h) = 25 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{80}h^4,$$

- obliczenia miejsc zerowych pochodnej: $h = -2\sqrt{5}$, $h = 2\sqrt{5}$, $h = -10$, $h = 10$,
- zbadania znaku pochodnej funkcji f : $f'(h) > 0$ dla $h \in (0, 2\sqrt{5})$, $f'(h) < 0$ dla $h \in (2\sqrt{5}, 10)$ i zapisania, że dla $h = 2\sqrt{5}$ funkcja V osiąga największą wartość.

Uwagi:

1. Znak pochodnej zdający może zaznaczyć w inny sposób, np. na rysunku szkicując krzywą zbliżoną do wykresu pochodnej.
2. Jeśli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji V lub określi funkcję f na zbiorze szerszym od dziedziny funkcji V , to punkt za tę część może otrzymać jedynie wtedy, gdy wskazuje jako największą wartość funkcji tylko to maksimum, które funkcja f osiąga dla argumentu z dziedziny funkcji V , przy czym konieczne jest uzasadnienie, że jest to największa wartość funkcji V lub że funkcja V nie przyjmuje wartości dla liczb większych od 10.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Trzeci etap

Zapisanie, że promień stożka o największej objętości jest równy $r = 4$, wysokość

$h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ i obliczenie największej objętości stożka $V(4) = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$. Za realizację tego

etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.