



**Centralna Komisja Egzaminacyjna**

# **EGZAMIN MATURALNY 2012**

## **MATEMATYKA**

### **POZIOM ROZSZERZONY**

#### **Kryteria oceniania odpowiedzi**

**MAJ 2012**

**Zadanie 1. (0–4)**

| Obszar standardów        | Opis wymagań                                                         |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| Modelowanie matematyczne | Rozwiązanie zadania, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b) |

**Rozwiązanie**

Niech  $a$  oznacza najmniejszą z czterech szukanych liczb całkowitych. Wtedy kolejne liczby to:  $a+1$ ,  $a+2$ ,  $a+3$ .

Zapisujemy zatem równanie kwadratowe  $a+3 = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2$

które po przekształceniu przyjmuje postać  $3a^2 + 5a + 2 = 0$ .

Równanie to ma dwa rozwiązania:  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = -\frac{2}{3}$ . Rozwiązanie  $-\frac{2}{3}$  odrzucamy jako

sprzeczne z treścią zadania (nie jest to liczba całkowita).

Zatem szukane liczby to:  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ .

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Zapisanie, że szukane liczby to:  $a$ ,  $a+1$ ,  $a+2$ ,  $a+3$ , gdzie  $a$  jest liczbą całkowitą.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą:

$$a+3 = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 \quad \text{lub} \quad 3a^2 + 5a + 2 = 0$$

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 3 pkt

- Przekształcenie równania  $a+3 = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2$  do postaci równania kwadratowego z błędem rachunkowym (na przykład błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste),

albo

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego  $3a^2 + 5a + 2 = 0$ , nieodrzućenie rozwiązania  $-\frac{2}{3}$  i podanie w odpowiedzi dwóch czwórek liczb.

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Zapisanie czwórki liczb całkowitych spełniających warunki zadania:  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ .

**Uwagi**

- Jeżeli zdający źle zinterpretuje treść zadania, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
- Jeśli zdający bez wykonywania rachunków poda odpowiedź i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt**.

## Zadanie 2. (0–4)

|                              |                                                  |
|------------------------------|--------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie nierówności wielomianowej (IV.3.c.R) |
|------------------------------|--------------------------------------------------|

### I sposób rozwiązania

Rozwiązanie nierówności wielomianowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to zastosowanie jednej z kilku metod, które pozwalają zapisać wielomian w postaci iloczynowej, drugi etap to rozwiązanie nierówności.

**Pierwszy etap:** zapisanie wielomianu w postaci iloczynowej.

I wariant (grupowanie wyrazów)

Zapisujemy nierówność w postaci  $x^4 + x^2 - 2x \geq 0$ , a następnie przedstawiamy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 2x &= x(x^3 + x - 2) = x(x(x^2 - 1) + 2(x - 1)) = \\ &= x(x(x - 1)(x + 1) + 2(x - 1)) = x(x - 1)(x(x + 1) + 2) = x(x - 1)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

II wariant (odgadnięcie pierwiastka i dzielenie metodą pisemną)

Zapisujemy nierówność w postaci  $x^4 + x^2 - 2x \geq 0$ , a następnie przedstawiamy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej:  $x^4 + x^2 - 2x = x(x^3 + x - 2)$ . Zauważamy, że  $x = 1$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3 + x - 2$  i dzielimy wielomian  $x^3 + x - 2$  przez dwumian  $x - 1$  sposobem pisemnym lub za pomocą algorytmu Hornera, otrzymując  $x^2 + x + 2$ . Następnie zapisujemy nierówność w postaci iloczynowej  $x(x - 1)(x^2 + x + 2) \geq 0$ .

**Drugi etap:** rozwiązanie nierówności.

Zauważamy, że trójmian  $x^2 + x + 2$  przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , zatem rozwiązanie nierówności  $x(x - 1)(x^2 + x + 2) \geq 0$  jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej  $x(x - 1) \geq 0$ , czyli sumą przedziałów  $(-\infty, 0) \cup \langle 1, +\infty)$ .

### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania** .....1 pkt

Zapisanie wielomianu  $x^4 + x^2 - 2x$  w postaci iloczynu, w którym jednym z czynników jest  $x$  lub  $x - 1$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** .....2 pkt

Zapisanie nierówności w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego, np.

$$x(x - 1)(x^2 + x + 2) \geq 0.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....3 pkt

- Zauważenie, że rozwiązanie nierówności  $x^4 + x^2 - 2x \geq 0$  jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej  $x(x - 1) \geq 0$

albo

- narysowanie i uzupełnienie tabeli znaków lub sporządzenie szkicu wykresu wielomianu z uwzględnieniem jego miejsc zerowych.

**Rozwiązanie pełne** .....4 pkt

Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności  $x^4 + x^2 \geq 2x$ :  $x \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, +\infty)$ .

**Uwaga**

Jeśli zdający podzieli nierówność przez  $x$  lub  $x-1$ , bez rozpatrzenia odpowiednich przypadków to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**II sposób rozwiązania**

Rozwiązujemy nierówność w trzech przedziałach:

$$\text{I. } x \in (-\infty, 0), \quad \text{II. } x \in (0, 1), \quad \text{III. } x \in (1, +\infty)$$

$$\text{I. } x \in (-\infty, 0)$$

Wtedy  $x^4 \geq 0$  i  $x^2 \geq 0$ , a  $2x \leq 0$ .

Stąd  $x^4 + x^2 \geq 2x$  dla każdego  $x \in (-\infty, 0)$ .

$$\text{II. } x \in (0, 1)$$

Wtedy  $x^4 < x$  i  $x^2 < x$ .

Stąd  $x^4 + x^2 < 2x$  dla każdego  $x \in (0, 1)$ .

Zatem dana nierówność nie ma rozwiązań w tym przedziale.

$$\text{III. } x \in (1, +\infty)$$

Wtedy  $x^4 \geq x$  i  $x^2 \geq x$ .

Stąd  $x^4 + x^2 \geq 2x$  dla każdego  $x \in (1, +\infty)$ .

Odp. Rozwiązaniem nierówności  $x^4 + x^2 \geq 2x$  jest zbiór  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

Zdający otrzymuje **po 1 punkcie** za rozwiązanie nierówności w każdym z trzech przedziałów.

**Czwarty punkt** zdający otrzymuje za podanie odpowiedzi końcowej.

**Zadanie 3. (0–4)**

|                              |                                                    |
|------------------------------|----------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R) |
|------------------------------|----------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Wykorzystując wzór na cosinus podwojonego kąta:  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ , przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu  $x$ :  $(2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 = 0$ .

Porządkujemy i otrzymujemy równanie:  $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ .

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np.  $t = \cos x$ , gdzie  $t \in [-1, 1]$ .

Otrzymujemy równanie kwadratowe  $2t^2 - 3t + 1 = 0$ .

Rozwiązujemy równanie kwadratowe, otrzymując:  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ .

Rozwiązujemy równania  $\cos x = 1$  i  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

Zapisujemy rozwiązania równań:

$$x = 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

lub

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

lub

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

### **Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania ..... 1 pkt**

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej argumentu  $x$ , np.:

$$(2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 = 0 \text{ lub } 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Rozwiązanie równania  $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$  z niewiadomą  $\cos x$ :  $\cos x = 1$  lub  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Rozwiązanie jednego z równań  $\cos x = 1$  lub  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

- Rozwiązanie równania:  $x = 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą lub  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  
gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą lub  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą

albo

- $x = n \cdot 360^\circ$ , gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą lub  $x = 60^\circ + n \cdot 360^\circ$ , gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą lub  $x = -60^\circ + n \cdot 360^\circ$ , gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$  i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 4. (0–6)**

|                              |                                                                                                             |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (IV.3.b.R) |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Obliczamy  $\Delta = m^2 - 12$  i następnie  $x_1 = \frac{m+2-\sqrt{m^2-12}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{m+2+\sqrt{m^2-12}}{2}$ .

Wówczas

$$x_1^2 = \frac{(m+2)^2 - 2(m+2)\sqrt{m^2-12} + m^2 - 12}{4} = \frac{2m^2 + 4m - 8 - 2(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4} =$$

$$= \frac{m^2 + 2m - 4 - (m+2)\sqrt{m^2-12}}{2}$$

i podobnie

$$x_2^2 = \frac{m^2 + 2m - 4 + (m+2)\sqrt{m^2-12}}{2}.$$

Następnie

$$x_1^4 = \frac{(m^2 + 2m - 4)^2 - 2(m^2 + 2m - 4) \cdot (m+2)\sqrt{m^2-12} + (m+2)^2(m^2-12)}{4} =$$

$$= \frac{m^4 + 4m^3 - 4m^2 - 16m + 16 + m^4 + 4m^3 - 8m^2 - 48m - 48 - 2(m^2 + 2m - 4) \cdot (m+2)\sqrt{m^2-12}}{4} =$$

$$= \frac{2m^4 + 8m^3 - 12m^2 - 64m - 32 - 2(m^2 + 2m - 4) \cdot (m+2)\sqrt{m^2-12}}{4}$$

i podobnie

$$x_2^4 = \frac{2m^4 + 8m^3 - 12m^2 - 64m - 32 + 2(m^2 + 2m - 4) \cdot (m+2)\sqrt{m^2-12}}{4}.$$

Teraz

$$x_1^4 + x_2^4 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16, \text{ czyli mamy równanie}$$

$$m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12, \text{ czyli } m^4 - 12m^2 + 36 = 64.$$

$$\text{Zatem } (m^2 - 6)^2 = 64, \text{ stąd: } m^2 - 6 = -8 \text{ lub } m^2 - 6 = 8,$$

$$\text{czyli } m^2 = -2 \text{ lub } m^2 = 14.$$

$$\text{Przypadek } m^2 = -2 \text{ jest niemożliwy; zatem } m^2 = 14, \text{ czyli } m = \sqrt{14} \text{ lub } m = -\sqrt{14}.$$

Należy na zakończenie zauważyć, że jeśli  $m^2 = 14$ , to  $\Delta = m^2 - 12 = 14 - 12 = 2 > 0$ , a więc oba pierwiastki  $x_1$  i  $x_2$  są rzeczywiste.

**Uwaga**

Zdający może rozpocząć od rozważenia nierówności  $\Delta > 0$ , czyli  $m^2 - 12 > 0$ . Otrzymuje  $m < -2\sqrt{3}$  lub  $m > 2\sqrt{3}$ . Potem może sprawdzać, czy otrzymane rozwiązania są zgodne z tymi nierównościami.

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania.**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

**a) Pierwsza część** polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ , gdzie  $\Delta = m^2 - 12$ .

Zatem  $\Delta > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m^2 - 12 > 0$ , czyli dla  $m \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność  $\Delta \geq 0$ , to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

**b) Druga część** polega na doprowadzeniu równania  $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$  do postaci równania ze zmienną  $m$  i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** .....1 pkt

Wyznaczenie  $x_1$  i  $x_2$ .

**Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp** .....2 pkt

Wyznaczenie  $x_1^2$  i  $x_2^2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania** .....3 pkt

Wyznaczenie  $x_1^4$  i  $x_2^4$  i zapisanie równości  $x_1^4 + x_2^4 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$ .

**Rozwiązanie bezbłędne części b)** .....4 pkt

Rozwiązanie równania  $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$ :  $m = \sqrt{14}$  lub  $m = -\sqrt{14}$ .

**Rozwiązanie pełne** .....6 pkt

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku  $\Delta > 0$ .

### **Uwagi**

1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności  $\Delta > 0$  z etapu a) i równania  $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$  z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

### **II sposób rozwiązania:**

Tak jak w sposobie I obliczamy  $x_1 = \frac{m+2-\sqrt{m^2-12}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{m+2+\sqrt{m^2-12}}{2}$ .

Następnie przyjmujemy oznaczenie  $t = \sqrt{m^2-12}$ .

Wówczas

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{(m+2-t)^4}{2^4} + \frac{(m+2+t)^4}{2^4} = \frac{(m+2-t)^4 + (m+2+t)^4}{16}.$$

Korzystamy ze wzorów:

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$\text{Stąd } (a-b)^4 + (a+b)^4 = 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4.$$

Zatem

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{2(m+2)^4 + 12(m+2)^2 t^2 + 2t^4}{16} = \frac{(m+2)^4 + 6(m+2)^2 t^2 + t^4}{8}.$$

Ponieważ  $t = \sqrt{m^2 - 12}$ , więc  $t^2 = m^2 - 12$  i  $t^4 = m^4 - 24m^2 + 144$ .

Mamy zatem

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= \frac{m^4 + 8m^3 + 24m^2 + 32m + 16 + (6m^2 + 24m + 24)(m^2 - 12) + m^4 - 24m^2 + 144}{8} = \\ &= \frac{8m^4 + 32m^3 - 48m^2 - 256m - 128}{8} = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16 \end{aligned}$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania.**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

**a) Pierwsza część** polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ , gdzie  $\Delta = m^2 - 12$ .

Zatem  $\Delta > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m^2 - 12 > 0$ , czyli dla  $m \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$ .

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność  $\Delta \geq 0$ , to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

**b) Druga część** polega na doprowadzeniu równania  $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$  do postaci równania z niewiadomą  $m$  i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** .....1 pkt

Wyznaczenie  $x_1$  i  $x_2$ .

**Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp** .....2 pkt

Przyjęcie oznaczenia, np.  $t = \sqrt{m^2 - 12}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania** .....3 pkt

Wyznaczenie  $x_1^4$  oraz  $x_2^4$  i zapisanie równości

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{(m+2-t)^4}{2^4} + \frac{(m+2+t)^4}{2^4} = \frac{(m+2-t)^4 + (m+2+t)^4}{16} = m^4 + 4m^3 - 16m^2 - 32m - 16$$

**Rozwiązanie bezbłędne części b)** .....4 pkt

Rozwiązanie równania  $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$ :  $m = \sqrt{14}$  lub  $m = -\sqrt{14}$ .

**Rozwiązanie pełne** .....6 pkt

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku  $\Delta > 0$ .

### **Uwagi**

- Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności  $\Delta > 0$  z etapu a) i równania  $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$  z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
- Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.



### **III sposób rozwiązania:**

Korzystamy ze wzorów Viète’a:  $x_1 + x_2 = m + 2$ ,  $x_1 \cdot x_2 = m + 4$ .

Mamy teraz:

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left( (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \right)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = \\ &= \left( (m+2)^2 - 2(m+4) \right)^2 - 2(m+4)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16 \end{aligned}$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania.**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

**a) Pierwsza część** polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ , gdzie  $\Delta = m^2 - 12$ .

Zatem  $\Delta > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m^2 - 12 > 0$ , czyli dla  $m \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$ .

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność  $\Delta \geq 0$ , to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

**b) Druga część** polega na doprowadzeniu równania  $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$  do postaci równania z niewiadomą  $m$  i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... **1 pkt**

Zapisanie równości:  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$ .

**Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp** ..... **2 pkt**

Zapisanie równości:  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left( (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \right)^2 - 2(x_1 x_2)^2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania** ..... **3 pkt**

Zapisanie wyrażenia  $x_1^4 + x_2^4$  w postaci sumy jednomianów zmiennej  $m$ , np.

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left( (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \right)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16.$$

**Rozwiązanie bezbłędne części b)** ..... **4 pkt**

Rozwiązanie równania  $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$ :  $m = \sqrt{14}$  lub  $m = -\sqrt{14}$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... **6 pkt**

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku  $\Delta > 0$ .

### **Uwagi**

- Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności  $\Delta > 0$  z etapu a) i równania  $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$  z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
- Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

**IV sposób rozwiązania:**

Korzystamy ze wzorów Viète'a oraz ze wzoru na  $(a+b)^4$ .

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^4 &= x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) + 6(x_1x_2)^2 = \\ &= x_1^4 + x_2^4 + 4x_1x_2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 6(x_1x_2)^2\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}x_1^4 + x_2^4 &= (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) - 6(x_1x_2)^2 = \\ &= (m+2)^4 - 4 \cdot (m+4)((m+2)^2 - 2 \cdot (m+4)) - 6 \cdot (m+4)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16\end{aligned}$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania.**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

**a) Pierwsza część** polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ , gdzie  $\Delta = m^2 - 12$ .

Zatem  $\Delta > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m^2 - 12 > 0$ , czyli dla  $m \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność  $\Delta \geq 0$ , to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

**b) Druga część** polega na doprowadzeniu równania  $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$  np. do postaci  $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$  i rozwiązaniu tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt**

Skorzystanie z wzoru  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .

**Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zapisanie równości:  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) - 6(x_1x_2)^2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania .....3 pkt**

Zapisanie wyrażenia  $x_1^4 + x_2^4$  w postaci sumy jednomianów zmiennej  $m$ , np.

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) - 6(x_1x_2)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16.$$

**Rozwiązanie pełne części b) .....4 pkt**

Rozwiązanie równania  $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$ :  $m = \sqrt{14}$  lub  $m = -\sqrt{14}$ .

**Rozwiązanie pełne .....6 pkt**

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku  $\Delta > 0$ .

**Uwagi**

- Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności  $\Delta > 0$  z etapu a) i równania  $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$  z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
- Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

### Zadanie 5. (0–6)

|                              |                                                                                          |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Zastosowanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego (IV.5.c) |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|

#### I sposób rozwiązania

Oznaczmy przez  $a$ ,  $b$ ,  $c$  kolejne liczby tworzące, w podanej kolejności, ciąg geometryczny. Przez  $a$  oraz  $q$  oznaczamy odpowiednio pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu geometrycznego. Wówczas  $b = aq$  oraz  $c = aq^2$ . Z treści zadania wiemy, że ciąg o wyrazach  $a$ ,  $b+8$ ,  $c$  jest arytmetyczny, co oznacza, że jest spełniona równość  $2(b+8) = a+c$ , czyli  $2(aq+8) = a+aq^2$ . Ponadto, ciąg o wyrazach  $a$ ,  $b+8$ ,  $c+64$  jest geometryczny, więc  $(b+8)^2 = a \cdot (c+64)$ , a stąd  $(aq+8)^2 = a \cdot (aq^2+64)$ .

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2(aq+8) = a+aq^2 \\ (aq+8)^2 = a \cdot (aq^2+64) \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy  $a = \frac{16}{1-2q+q^2}$  (przy założeniu, że  $q \neq 1$ )

i podstawiamy do drugiego równania. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{16}{1-2q+q^2} \cdot q - 4 \cdot \frac{16}{1-2q+q^2} + 4 = 0$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego:

$$\begin{aligned} 16q + 4(1-2q+q^2) - 64 &= 0, \\ 4q + 1 - 2q + q^2 - 16 &= 0, \\ q^2 + 2q - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby:  $q_1 = -5$ ,  $q_2 = 3$ .

Jeżeli  $q = -5$ , to  $a = \frac{4}{9}$ ,  $b = -\frac{20}{9}$  oraz  $c = -\frac{20}{9} \cdot (-5) = \frac{100}{9}$ .

Jeżeli zaś  $q = 3$ , to  $a = 4$ ,  $b = 12$  oraz  $c = 12 \cdot 3 = 36$ .

Zauważmy na zakończenie, że założenie  $q \neq 1$  nie zmniejsza ogólności rozważań, bo gdyby  $q = 1$ , to otrzymalibyśmy (początkowy) ciąg geometryczny stały, zaś ciąg  $(a, a+8, a)$  nie byłby arytmetyczny dla żadnej wartości  $a$ , wbrew treści zadania.

Odpowiedź: Istnieją dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania:  $(4, 12, 36)$  oraz

$$\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right).$$

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt  
Zapisanie, że:

liczby  $a$ ,  $aq$ ,  $aq^2$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz liczby  $a$ ,  $aq+8$ ,  $aq^2$ , w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby  $a$ ,  $aq+8$ ,  $aq^2+64$ , w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego do zapisania układu równań, np.

$$\begin{cases} a + aq^2 = 2(aq + 8) \\ (aq + 8)^2 = a(aq^2 + 64) \end{cases}$$

**Uwaga**

Jeżeli zdający pomyli własności któregośkolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą np.:  $q^2 + 2q - 15 = 0$  lub  $9a^2 - 40a + 16 = 0$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający w trakcie przekształcania układu równań popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).....5 pkt**

- Zdający popełni błędy rachunkowe w rozwiązywaniu równania kwadratowego, np.  $q^2 + 2q - 15 = 0$  i konsekwentnie do tych błędów poda w odpowiedzi dwa ciągi geometryczne

lub

- przekształci układ równań z błędem (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne .....6 pkt**

Zapisanie dwóch trójek liczb, z których każda tworzy ciąg geometryczny opisany w treści

zadania:  $(4, 12, 36)$  oraz  $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$ .

**II sposób rozwiązania**

Oznaczmy przez  $a, b, c$  trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wówczas  $b^2 = a \cdot c$ . Ponieważ ciąg  $(a, b+8, c)$  jest arytmetyczny, więc  $2(b+8) = a + c$ . Ponadto, ciąg

$(a, b+8, c+64)$  jest geometryczny, zatem  $(b+8)^2 = a \cdot (c+64)$ .

Zapisujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ 2(b+8) = a + c \\ (b+8)^2 = a \cdot (c+64) \end{cases}$$

a następnie przekształcamy go w sposób równoważny:

$$\begin{cases} c = 2b - a + 16 \\ b^2 = 2ab + 16a - a^2 \\ (b+8)^2 = 2ab + 16a - a^2 + 64a \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie i trzecie równanie i otrzymujemy  $(b+8)^2 - b^2 = 64a$ .

Stąd  $a = \frac{b+4}{4}$ . Podstawiamy  $a = \frac{b+4}{4}$  do drugiego równania i otrzymujemy

$$b^2 = \frac{b+4}{4} \cdot \left( 2b+16 - \frac{b+4}{4} \right)$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego

$$16b^2 = 7b^2 + 88b + 240, \text{ czyli } 9b^2 - 88b - 240 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby:  $b_1 = -\frac{20}{9}$ ,  $b_2 = 12$ .

Jeżeli  $b = -\frac{20}{9}$ , to  $a = \frac{4}{9}$  oraz  $c = \frac{100}{9}$ .

Jeżeli zaś  $b = 12$ , to  $a = 4$  oraz  $c = 36$ .

Odpowiedź: Istnieją dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania:  $(4, 12, 36)$  oraz

$$\left( \frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9} \right).$$

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania zadania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Zapisanie, że liczby  $a, b, c$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz, że liczby  $a, b+8, c$ , w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, zaś liczby  $a, b+8, c+64$ , w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego do zapisania układu równań umożliwiającego obliczenie liczb  $a, b, c$ , np.

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ 2(b+8) = a + c \\ (b+8)^2 = a \cdot (c+64) \end{cases}$$

### **Uwaga**

Jeżeli zdający pomyli własności któregoś z ciągów, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:  $9a^2 - 40a + 16 = 0$  lub  $9b^2 - 88b - 240 = 0$  lub  $9c^2 - 424c + 3600 = 0$ .

### **Uwaga**

Jeżeli w trakcie przekształcania układu równań zdający popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 5 pkt

- Zdający popełni błędy rachunkowe w rozwiązywaniu równania kwadratowego, np.  $9b^2 - 88b - 240 = 0$  i konsekwentnie do tych błędów poda w odpowiedzi dwa ciągi geometryczne

lub

- przekształci układ równań z błędem (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne ..... 6 pkt**

Zapisanie dwóch trójek liczb, z których każda tworzy ciąg geometryczny opisany w treści

zadania:  $(4, 12, 36)$  oraz  $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$ .**Zadanie 6. (0–6)**

|                          |                                                                                                                        |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Modelowanie matematyczne | Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (III.8.e; 4.k) |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Wyznaczamy odległość punktów  $P$  i  $Q$ :  $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{55}{2} - \frac{1}{2}m - \frac{5}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$ .

Wyznaczamy wzór funkcji  $f$  opisującej wartość  $|PQ|^2$ :

$$f(m) = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2 = \frac{5}{4}(m^2 - 20m + 500) \text{ dla } m \in \langle -1, 7 \rangle.$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ :

$$m_w = \left(\frac{5}{4} \cdot 20\right) : \left(2 \cdot \frac{5}{4}\right) = 25 : \frac{5}{2} = 25 \cdot \frac{2}{5} = 10.$$

Ponieważ  $10 \notin \langle -1, 7 \rangle$ , więc w tym przedziale funkcja  $f$  jest monotoniczna. Zatem największa i najmniejsza wartość funkcji  $f$  dla  $m \in \langle -1, 7 \rangle$  są przyjmowane dla argumentów, będących końcami tego przedziału.

$$f(-1) = \frac{5}{4}(1 + 20 + 500) = 651,25 \text{ oraz } f(7) = \frac{5}{4}(49 - 140 + 500) = 511,25.$$

Zatem najmniejsza i największa wartość  $|PQ|^2$  to odpowiednio 511,25 oraz 651,25.

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wyznaczenie odległości między punktami  $P$  i  $Q$ :  $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$  lub

$$|PQ|^2 = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2.$$

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze, np.  $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 - m^2}$ , to otrzymuje za całe zadanie **0 punktów**.

### **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .. 2 pkt**

Zapisanie wzoru funkcji  $f$  w postaci, np.:  $f(m) = \frac{5}{4}m^2 - 25m + 625$  lub

$$f(m) = \frac{5}{4}(m^2 - 20m + 500).$$

### Uwaga

Dalszej ocenie podlega badanie tylko takich funkcji kwadratowych, które przyjmują wartości nieujemne w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

### **Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 pkt**

- Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji  $f$  i stwierdzenie, że współrzędna ta nie należy do przedziału  $\langle -1, 7 \rangle$ :  $m_w = 10$  i  $10 \notin \langle -1, 7 \rangle$  i z rozwiązania wynika, że  $f(10)$  nie jest żadną z poszukiwanych wartości

albo

- obliczenie  $f(-1)$  i  $f(7)$ , zapisanie bez uzasadnienia, że  $f(-1)$  jest wartością największą,  $f(7)$  jest wartością najmniejszą.

### **Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 5 pkt**

### **Rozwiązanie pełne ..... 6 pkt**

Podanie najmniejszej i największej wartości  $|PQ|^2$  odpowiednio 511,25 oraz 651,25 z uzasadnieniem, np. powołanie się na monotoniczność lub stwierdzenie, że pierwsza współrzędna wierzchołka nie należy do podanego przedziału.

### Uwaga

Jeśli zdający obliczy  $f(10) = 500$ ,  $f(-1) = 651,25$  i  $f(7) = 511,25$  i stąd wywnioskuje, że najmniejszą wartością funkcji  $f$  jest 500, a największą 651,25, to za całe rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

### **Zadanie 7. (0–3)**

|                            |                                               |
|----------------------------|-----------------------------------------------|
| Rozumowanie i argumentacja | Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.2.b) |
|----------------------------|-----------------------------------------------|

### Rozwiązanie

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 &\geq 0, \\ (a^3 - a^2b) + (b^3 - ab^2) &\geq 0, \\ a^2(a - b) + b^2(b - a) &\geq 0, \end{aligned}$$

$$(a-b)(a^2-b^2) \geq 0,$$

$$(a-b)^2(a+b) \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż z założenia  $a+b \geq 0$  oraz  $(a-b)^2 \geq 0$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ , co kończy dowód.

### **Schemat oceniania rozwiązania**

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....2 pkt**

Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej  $(a-b)(a^2-b^2) \geq 0$  lub

$$(a-b)^2(a+b) \geq 0, \text{ lub } (a-b)(a-b)(a+b) \geq 0.$$

**Rozwiązanie pełne .....3 pkt**

Przeprowadzenie pełnego dowodu.

### **Uwaga**

1. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez  $a+b$ , nie zakładając, że  $a+b \neq 0$ , to otrzymuje **0 punktów**.
2. W przypadku gdy zdający podzieli nierówność przez  $a+b > 0$  i nie rozpatrzy przypadku  $a+b = 0$ , to przyznajemy **2 punkty**.

### **Zadanie 8. (0–4)**

|                              |                                                                                                                                 |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.R) |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### **Rozwiązanie**

Rozkładamy liczbę 12 na czynniki pierwsze  $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ .

Mamy więc trzy, parami wykluczające się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12:

1. Wśród cyfr tej liczby są „3”, „4” i sześć „1” ( $12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ ). Takich liczb jest:  $8 \cdot 7 = 56$  – wybieramy miejsce dla „3” na 8 sposobów i z pozostałych dla „4” na 7 sposobów.
2. Wśród cyfr tej liczby są „2”, „6” i sześć „1” ( $12 = 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ ). Takich liczb jest:  $8 \cdot 7 = 56$  – wybieramy miejsce dla „2” na 8 sposobów i z pozostałych dla „6” na 7 sposobów.
3. Wśród cyfr tej liczby są dwie „2”, jedna „3” i pięć „1” ( $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ ). Takich liczb jest:  $8 \cdot \binom{7}{2} = 168$  – wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla „3” a następnie dwa miejsca z pozostałych siedmiu dla „2”.

Zatem liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12 jest  $56 + 56 + 168 = 280$ .

### **Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zapisanie, co najmniej dwóch z trzech parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości):

$$12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$12 = 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$



**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisać wszystkich trzech, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości):

$$12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$12 = 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12, w co najmniej dwóch z trzech możliwości.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

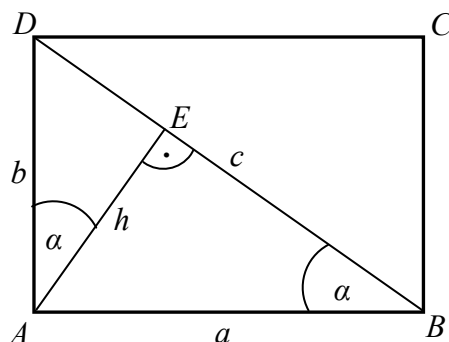
Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12:

$$56 + 56 + 168 = 280.$$

**Zadanie 9. (0–5)**

|                              |                                                                                                         |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem własności figur podobnych (IV.7.c.R) |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $DAB$  otrzymujemy  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Trójkąt ten jest podobny do trójkąta  $DEA$  (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $D$ ), więc  $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BA|}{|BD|}$  oraz  $\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DB|}$ , czyli  $\frac{h}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  oraz  $\frac{|DE|}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Stąd

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } |DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{Pole trójkąta } AED \text{ jest równe } P_{ADE} = \frac{1}{2} h \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab^3}{2(a^2 + b^2)}.$$

**II sposób rozwiązania**

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $DAB$  otrzymujemy  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Trójkąt ten jest podobny do trójkąta  $DEA$  (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $D$ ), więc  $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BA|}{|BD|}$  oraz  $\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DB|}$ , czyli  $\frac{h}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  oraz  $\frac{|DE|}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Stąd

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } |DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Wyznaczamy sinus kąta  $EAD$  w trójkącie  $AED$ :  $\sin|\angle EAD| = \frac{|DE|}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Pole trójkąta  $AED$  jest równe:

$$P_{AED} = \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \sin|\angle EAD| = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab^3}{2(a^2 + b^2)}.$$

### Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- Zauważenie, że trójkąty  $AED$  (lub  $AEB$ ) i  $BAD$  są podobne i zapisanie odpowiedniej

proporcji np.:  $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|BD|}$  lub  $\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|BD|}$

albo

- zapisanie pola trójkąta  $AED$ :  $P = \frac{|AE| \cdot |DE|}{2}$  lub  $P = \frac{|AE| \cdot |AD| \cdot \sin|\angle EAD|}{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie długości odcinka  $DE$ :  $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  lub  $AE$ :  $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  lub

$$\sin|\angle EAD| = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

- Obliczenie długości obu odcinków  $DE$ :  $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  i  $AE$ :  $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

lub

- obliczenie długości odcinka  $AE$ :  $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  i  $\sin|\angle EAD| = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

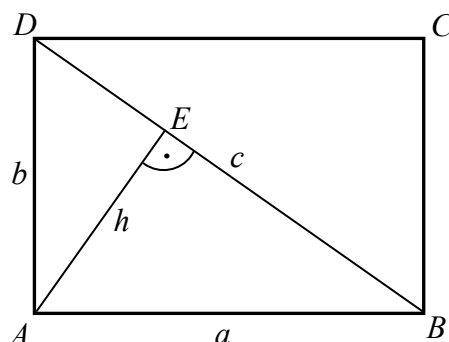
**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie pola trójkąta  $AED$ :  $P_{AED} = \frac{ab^3}{2(a^2 + b^2)}.$

### III sposób rozwiązania



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $DAB$  otrzymujemy  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Trójkąt  $AED$  jest podobny do trójkąta  $BAD$ , a ten jest podobny do trójkąta  $BEA$ , więc trójkąt  $BEA$  jest podobny do trójkąta  $AED$ . Skala tego podobieństwa jest równa  $\frac{a}{b}$ . Stosunek pól tych trójkątów jest

$$\text{równy } \frac{P_{BEA}}{P_{AED}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2. \text{ Stąd } P_{BEA} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot P_{AED}.$$

$$\text{Ponieważ } P_{ABD} = \frac{1}{2}ab = P_{BEA} + P_{AED}, \text{ więc } \frac{1}{2}ab = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot P_{AED} + P_{AED}.$$

$$\text{Stąd } P_{AED} = \frac{\frac{1}{2}ab}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} = \frac{ab^3}{2(a^2 + b^2)}.$$

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zauważenie, że trójkąty  $AED$  i  $BEA$  są podobne i zapisanie stosunku ich pól w zależności od

$$\text{skali ich podobieństwa: } \frac{P_{BEA}}{P_{AED}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wyznaczenie pola trójkąta  $ABD$  i zapisanie go jako sumy pól trójkątów  $BEA$  i  $AED$ .

### **Uwaga**

Rozwiązanie możemy zakwalifikować do tej kategorii tylko pod warunkiem, że skala podobieństwa trójkątów  $BEA$  i  $AED$  została zapisana w zależności od  $a$  i  $b$ .

**Rozwiązanie zadania prawie do końca ..... 4 pkt**

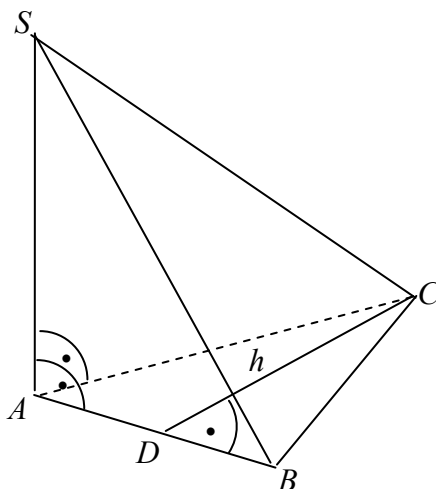
$$\text{Zapisanie równania z niewiadomą } P_{AED}: \frac{1}{2}ab = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot P_{AED} + P_{AED}.$$

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

$$\text{Obliczenie pola trójkąta } AED: P_{AED} = \frac{ab^3}{2(a^2 + b^2)}.$$

**Zadanie 10. (0–5)**

|                              |                                                       |
|------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (IV.9.b) |
|------------------------------|-------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BAS$ , obliczamy długość boku  $AB$ :

$$|AB| = \sqrt{118^2 - (8\sqrt{210})^2} = 22.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $CAS$ , obliczamy długość boku  $AC$ :

$$|AC| = \sqrt{131^2 - (8\sqrt{210})^2} = 61.$$

Stąd wynika, że  $|BC| = 61$ , ponieważ nie istnieje trójkąt o długościach boków 22, 22, 61 (nierówność trójkąta).

Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, wówczas wysokość  $h$  opuszczona na bok  $AB$  jest równa:

$$h = \sqrt{61^2 - 11^2} = 60.$$

Obliczamy pole  $P$  trójkąta  $ABC$ :  $P = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 60 = 660$ .

Obliczamy objętość  $V$  ostrosłupa  $ABCS$ :  $V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot 660 \cdot 8\sqrt{210} = 1760\sqrt{210}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Obliczenie długości boku  $AB$ :  $|AB| = 22$  albo obliczenie długości boku  $AC$ :  $|AC| = 61$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 3 pkt**

Obliczenie długości boku  $AB$ :  $|AB| = 22$  i długości boku  $AC$ :  $|AC| = 61$  oraz zauważenie, że długość boku  $BC$  jest równa 61.

**Uwaga**

Jeśli zdający obliczy  $|AB|$  oraz  $|AC|$  i nie zapisze (zauważy), że  $|BC| = 61$ , to przyznajemy **2 punkty**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 pkt**

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa:  $P = 660$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 1760\sqrt{210}$ .

**Uwaga**

Jeśli zdający nie zauważy, że trójkąt o bokach 22, 22, 61 nie istnieje i obliczy dwie „możliwe” objętości ostrosłupów, to otrzymuje **4 punkty**.

**Zadanie 11. (0–3)**

|                            |                                                                                               |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Rozumowanie i argumentacja | Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c.d) |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania.**

Zdarzenia  $A \cap B'$  oraz  $A' \cap B$  są rozłączne.

Stąd i z faktu, że  $P((A \cap B') \cup (A' \cap B)) \leq 1$  wynika, że

$$1 \geq P((A \cap B') \cup (A' \cap B)) = P(A \cap B') + P(A' \cap B), \text{ czyli } P(A' \cap B) \leq 0,3.$$

**Uwaga**

Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą diagramu Venna.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zdający zauważy, że zdarzenia  $A \cap B'$  oraz  $A' \cap B$  są rozłączne.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający zapisze, że  $1 \geq P((A \cap B') \cup (A' \cap B)) = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zdający przeprowadzi pełny dowód.

**Uwaga**

Jeżeli zdający przeprowadzi pełny dowód, ale nie zapisze, że podane zdarzenia są rozłączne, to otrzymuje **2 punkty**.

**II sposób rozwiązania.**

Wiemy, że  $(A \cap B') \subset B'$ , stąd  $P(A \cap B') \leq P(B')$ , czyli  $P(A \cap B') \leq 1 - P(B)$ .

Zatem  $P(B) \leq 0,3$ .

Wiemy, że  $(A' \cap B) \subset B$ , stąd mamy  $P(A' \cap B) \leq P(B)$ , czyli  $P(A' \cap B) \leq 0,3$ , co kończy dowód.

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zapisanie, że  $(A \cap B') \subset B'$ . Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....2 pkt**

Zapisanie, że  $(A' \cap B) \subset B$  oraz, że  $P(B) \leq 0,3$ . Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z pozostałych zapisów.

**Rozwiązanie pełne .....3 pkt**

Zapisanie wniosku:  $P(A' \cap B) \leq 0,3$ .