



Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2012

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Kryteria oceniania odpowiedzi

CZERWIEC 2012

Zadanie 1. (0-4)

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną (III.3.e.R)

I sposób rozwiązania (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty \rangle$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x \in (-\infty, -1)$	$x \in \langle -1, 2 \rangle$	$x \in \langle 2, \infty \rangle$
$-x + 2 - x - 1 \geq 3x - 3$ $-5x \geq -4$ $x \leq \frac{4}{5}$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x < -1$	$-x + 2 + x + 1 \geq 3x - 3$ $-3x \geq -6$ $x \leq 2$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-1 \leq x < 2$	$x - 2 + x + 1 \geq 3x - 3$ $-x \geq -3 + 1$ $x \leq 2$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x = 2$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, 2)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty \rangle$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, -1)$ $-x + 2 - x - 1 \geq 3x - 3$

II. $x \in \langle -1, 2 \rangle$ $-x + 2 + x + 1 \geq 3x - 3$

III. $x \in \langle 2, \infty \rangle$ $x - 2 + x + 1 \geq 3x - 3$

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 3 pkt

- Zdający poprawnie rozwiąże wszystkie trzy nierówności i poprawnie wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, a w trzecim przypadku popełni błąd i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- poprawnie rozwiąże nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in (-\infty, 2\rangle$ lub $x \leq 2$.

Uwaga

Zdający może włączyć liczby -1 i 2 do wszystkich ograniczonych tymi liczbami przedziałów. Jeżeli natomiast nie włączy tych liczb do żadnego rozważanego przedziału (rozważy wszystkie przedziały otwarte), to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

II sposób rozwiązania (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x-2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$ $x = 2$	$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \\ x-2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < -1 \\ \dots \end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ -x+2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$ $-1 \leq x < 2$	$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \\ -x+2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x < -1 \\ x \leq \frac{4}{5} \end{cases}$ $-\infty < x < -1$
---	--	---	---

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności są $x \leq 2$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zdający zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$

Uwaga

Jeżeli zdający błędnie zapisze którykolwiek z czterech przypadków, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania2 pkt

Zdający zapisze cztery układy nierówności:

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x-2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \\ x-2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ -x+2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \\ -x+2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$
---	--	---	--

Uwaga

Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).....3 pkt

Zdający poprawnie rozwiąże co najmniej trzy układy nierówności.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in (-\infty, 2\rangle$ lub $x \leq 2$.

Uwaga

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

III sposób rozwiązania (graficznie)

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = |x-2| + |x+1|$ i prostą o równaniu $y = 3x-3$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty)$.

Zapisujemy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

I. $x \in (-\infty, -1)$ $f(x) = -x + 2 - x - 1$

II. $x \in \langle -1, 2 \rangle$ $f(x) = -x + 2 + x + 1$

III. $x \in \langle 2, \infty)$ $f(x) = x - 2 + x + 1$

Przekształcamy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach do postaci $f(x) = ax + b$:

I. $x \in (-\infty, -1)$ $f(x) = -2x + 1$

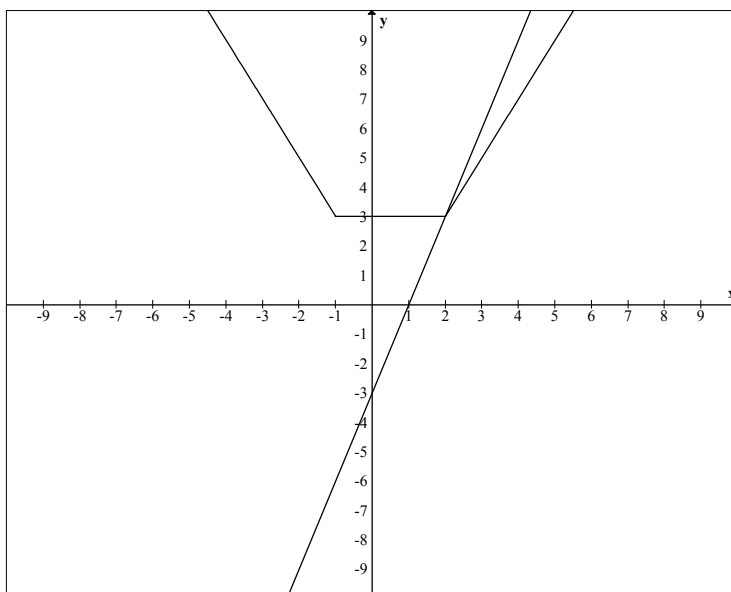
II. $x \in \langle -1, 2 \rangle$ $f(x) = 3$

III. $x \in \langle 2, \infty)$ $f(x) = 2x - 1$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ 2x-1 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 3x - 3$:



Odczytujemy odcietą punktu przecięcia wykresu funkcji f i prostej o równaniu $y = 3x - 3$: $x = 2$. Podajemy argumenty, dla których $f(x) \geq 3x - 3$: $x \in (-\infty, 2]$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty \rangle$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający poprawnie zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, -1)$ $f(x) = -2x + 1$

II. $x \in \langle -1, 2 \rangle$ $f(x) = 3$

III. $x \in \langle 2, \infty \rangle$ $f(x) = 2x - 1$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 3x - 3$.

Rozwiązanie pełne.....4 pkt

Zdający zapisze przedział: $x \in (-\infty, 2)$ lub $x \leq 2$.

Uwaga

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

IV sposób rozwiązania

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = |x - 2| + |x + 1| - 3x + 3$, postępując np. w opisany poniżej sposób.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty \rangle$.

Zapisujemy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$\text{I. } x \in (-\infty, -1) \quad f(x) = -x + 2 - x - 1 - 3x + 3$$

$$\text{II. } x \in \langle -1, 2 \rangle \quad f(x) = -x + 2 + x + 1 - 3x + 3$$

$$\text{III. } x \in \langle 2, \infty \rangle \quad f(x) = x - 2 + x + 1 - 3x + 3$$

Przekształcamy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach do postaci $f(x) = ax + b$:

$$\text{I. } x \in (-\infty, -1) \quad f(x) = -5x + 4$$

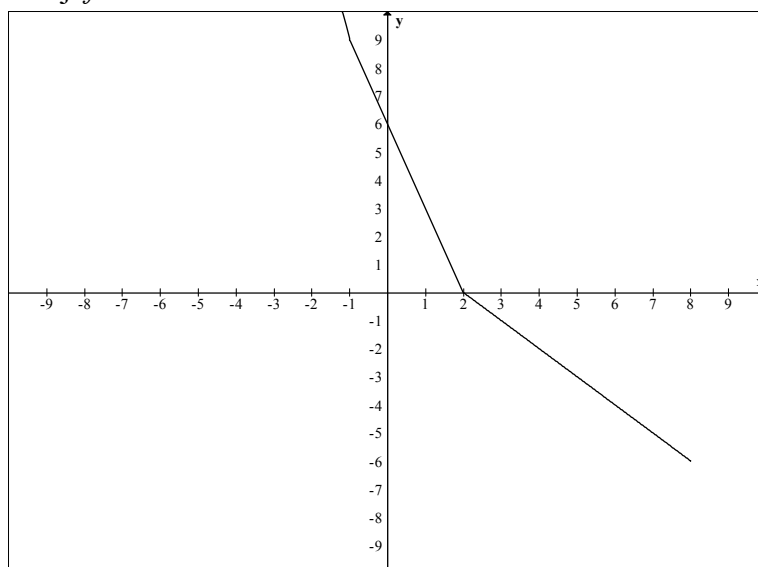
$$\text{II. } x \in \langle -1, 2 \rangle \quad f(x) = -3x + 6$$

$$\text{III. } x \in \langle 2, \infty \rangle \quad f(x) = -x + 2$$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -3x + 6 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ -x + 2 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji f :



Odczytujemy wszystkie argumenty, dla których $f(x) \geq 0$, czyli: $-\infty < x \leq 2$

lub zapisujemy: zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, 2]$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty \rangle$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach, np.

I. Jeśli $x \in (-\infty, -1)$, to $f(x) = -5x + 4$

II. Jeśli $x \in \langle -1, 2 \rangle$, to $f(x) = -3x + 6$

III. Jeśli $x \in \langle 2, \infty \rangle$, to $f(x) = -x + 2$

albo

I. Jeśli $x < -1$, to $f(x) = -5x + 4$

II. Jeśli $-1 \leq x < 2$, to $f(x) = -3x + 6$

III. Jeśli $x \geq 2$, to $f(x) = -x + 2$

albo

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -3x + 6 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ -x + 2 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji f .

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający zapisze przedział: $x \in (-\infty, 2]$ lub $x \leq 2$.

Uwaga

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie **o 1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

Zadanie 2. (0-4)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie twierdzenia o równości wielomianów (IV.2.a.R)
------------------------------	---

Rozwiązanie (porównanie współczynników wielomianu)

Wielomian W zapisujemy w postaci kwadratu wielomianu P : $W(x) = (x^2 + cx + d)^2$.

Przekształcamy ten wielomian i porządkujemy jego wyrazy:

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2 + cx + d) \cdot (x^2 + cx + d) = x^4 + cx^3 + dx^2 + cx^3 + c^2x^2 + cdx + dx^2 + cdx + d^2 = \\ &= x^4 + 2cx^3 + (2d + c^2)x^2 + 2cdx + d^2 \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki wielomianu W i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ 2cd = -24 \\ d^2 = 9 \end{cases} \quad \text{Stąd} \quad \begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ c = -4 \\ d = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ c = 4 \\ d = -3 \end{cases} \quad \text{i następnie} \quad \begin{cases} c = -4 \\ d = 3 \\ a = -8 \\ b = 22 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} c = 4 \\ d = -3 \\ a = 8 \\ b = 10 \end{cases}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zapisanie wielomianu W w postaci kwadratu wielomianu P : $W(x) = (x^2 + cx + d)^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zapisanie wielomianu W w postaci uporządkowanej, np.:

$$W(x) = x^4 + 2cx^3 + (2d + c^2)x^2 + 2cdx + d^2.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie a oraz b , np.:
$$\begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ 2cd = -24 \\ d^2 = 9 \end{cases}$$

Rozwiązanie pełne4 pkt

Obliczenie a oraz b : $\begin{cases} a = -8 \\ b = 22 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 8 \\ b = 10 \end{cases}$.

Zadanie 3. (0-5)

Użycie i tworzenie strategii

Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R)

I sposób rozwiązania

Z równania $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$ wyznaczamy jedną z funkcji trygonometrycznych w zależności od drugiej, np. $\cos \alpha = \frac{4}{3} - \sin \alpha$. Stąd i z jedynki trygonometrycznej mamy

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{3} - \sin \alpha \right)^2 = 1$$

$$2\sin^2 \alpha - \frac{8}{3}\sin \alpha + \frac{7}{9} = 0.$$

Otrzymane równanie kwadratowe z niewiadomą $\sin \alpha$ ma dwa rozwiązania:

$$\sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Gdy } \sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}, \text{ to } \cos \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Natomiast gdy } \sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}, \text{ to } \cos \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}.$$

W każdym z tych przypadków wartość wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$ jest taka sama i równa

$$\left| \frac{4 + \sqrt{2}}{6} - \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \right| = \left| \frac{4 + \sqrt{2} - 4 + \sqrt{2}}{6} \right| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

- Zapisanie równania, w którym występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna kąta α :

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{3} - \sin \alpha \right)^2 = 1 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{4}{3} - \cos \alpha \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

albo

- wyznaczenie z równania $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$ jednej z funkcji w zależności od drugiej

i zapisanie wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$ w zależności od tej funkcji:

$$|\cos \alpha - \sin \alpha| = \left| \frac{4}{3} - 2\sin \alpha \right| \quad \text{albo} \quad |\cos \alpha - \sin \alpha| = \left| 2\cos \alpha - \frac{4}{3} \right|.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej:

$$2\sin^2 \alpha - \frac{8}{3}\sin \alpha + \frac{7}{9} = 0 \quad \text{albo} \quad 2\cos^2 \alpha - \frac{8}{3}\cos \alpha + \frac{7}{9} = 0.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pktObliczenie wartości $\sin \alpha$ albo $\cos \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$$

albo

$$\cos \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$

Rozwiązanie zadania prawie do końca4 pkt

- Obliczenie wartości drugiej funkcji trygonometrycznej kąta α :

$$\cos \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$

albo

$$\sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$$

albo

- zapisanie wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$ w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej:

$$|\cos \alpha - \sin \alpha| = \left| \frac{4}{3} - 2 \sin \alpha \right| \quad \text{albo} \quad |\cos \alpha - \sin \alpha| = \left| 2 \cos \alpha - \frac{4}{3} \right|$$

Rozwiązanie pełne5 pktObliczenie wartości wyrażenia: $|\cos \alpha - \sin \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{3}$.**II sposób rozwiązania**Podnosząc obie strony równania $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$ do kwadratu dostajemy

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{16}{9}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ więc } 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}.$$

Zatem wartość wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$ jest równa

$$|\cos \alpha - \sin \alpha| = \sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 2 \cos \alpha \sin \alpha} = \sqrt{1 - \frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

- Obliczenie wartości $2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}$

albo

- zapisanie wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$ w postaci $\sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

- Obliczenie wartości $2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}$

oraz

- zapisanie wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$ w postaci $\sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}$.

Rozwiązanie zadania prawie do końca 4 pkt

- Obliczenie wartości $2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}$

oraz

- zapisanie wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$ w postaci $\sqrt{1 - 2 \cos \alpha \sin \alpha}$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie wartości wyrażenia: $|\cos \alpha - \sin \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Zadanie 4. (0-5)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, Przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (IV.3.b.R)
------------------------------	---

I sposób rozwiązania (wzory Viète’a)

Aby równanie miało dwa różne pierwiastki musi zachodzić nierówność $\Delta > 0$.

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| = 3 \end{cases}$$

Wyznaczamy Δ :

$$\Delta = (3 - 2m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m + 1) = 9 - 12m + 4m^2 + 8m - 8 = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$: $(2m - 1)^2 > 0$, czyli $2m - 1 \neq 0$. Stąd $m \neq \frac{1}{2}$.

Wariant I

Równanie $|x_1 - x_2| = 3$ zapisujemy najpierw w postaci równoważnej $(x_1 - x_2)^2 = 9$,

a dalej $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 9$, czyli $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$.

Stosując wzory Viète’a zapisujemy równanie w postaci

$$\left(-\frac{3-2m}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-m+1}{2} = 9.$$

Stąd

$$(2m - 3)^2 - 8(-m + 1) = 36$$

$$4m^2 - 4m - 35 = 0$$

$$\Delta = 576 = 24^2$$

$$m = \frac{4 - 24}{8} = -\frac{5}{2} \quad \text{lub} \quad m = \frac{4 + 24}{8} = \frac{7}{2}.$$

Wariant II

Zapisujemy wyrażenie $|x_1 - x_2|$ w postaci równoważnej i przekształcamy:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

Stąd, stosując wzory Viète'a, otrzymujemy:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \sqrt{\frac{\Delta}{a^2}} = \frac{|2m-1|}{2}$$

Równanie $|x_1 - x_2| = 3$ jest zatem równoważne równaniu $\frac{|2m-1|}{2} = 3$

Stąd $|2m-1| = 6$ i następnie $2m-1 = 6$ lub $2m-1 = -6$, czyli $m = \frac{7}{2}$ lub $m = -\frac{5}{2}$.

Obie otrzymane wartości m są różne od $\frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{7}{2}$.

II sposób rozwiązania (wzory na pierwiastki)

Aby równanie miało dwa różne pierwiastki musi zachodzić nierówność $\Delta > 0$.

Wyznaczamy Δ :

$$\Delta = (3-2m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m+1) = 9 - 12m + 4m^2 + 8m - 8 = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2$$

Warunek $\Delta > 0$ zachodzi, gdy

$$(2m-1)^2 > 0, \text{ co ma miejsce, gdy } 2m-1 \neq 0, \text{ czyli dla } m \neq \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $\Delta = (2m-1)^2$, zatem $\sqrt{\Delta} = |2m-1|$.

$$\text{Stąd } x_1 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4}, \quad x_2 = \frac{2m-3+|2m-1|}{4}.$$

Warunek $|x_1 - x_2| = 3$ możemy zapisać w postaci $x_1 - x_2 = 3$ lub $x_1 - x_2 = -3$.

Obliczamy:

$$x_1 - x_2 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4} - \frac{2m-3+|2m-1|}{4} = \frac{-2|2m-1|}{4} = -\frac{|2m-1|}{2}.$$

Zatem alternatywę $x_1 - x_2 = 3$ lub $x_1 - x_2 = -3$ możemy zapisać w postaci

$$-\frac{|2m-1|}{2} = 3 \text{ lub } -\frac{|2m-1|}{2} = -3$$

Pierwsze z otrzymanych równań jest sprzeczne, wystarczy więc rozwiązać drugie:

$$-\frac{|2m-1|}{2} = -3, \text{ stąd } |2m-1| = 6.$$

Zatem $2m-1 = 6$ lub $2m-1 = -6$, czyli $m = \frac{7}{2}$ lub $m = -\frac{5}{2}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

Część a) polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, gdzie rozwiązujemy nierówność

$$(2m-1)^2 > 0: \quad m \neq \frac{1}{2}.$$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający rozpatrzy warunek $\Delta \geq 0$, wówczas za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Część b) polega na rozwiązaniu równania $|x_1 - x_2| = 3$: $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{7}{2}$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Część c) polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązania nierówności z a) i rozwiązania równania z b). Za poprawne rozwiązanie części c) zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach części b) rozwiązania wyróżniamy następujące etapy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

- Zapisanie równania $|x_1 - x_2| = 3$ w postaci równoważnej $(x_1 - x_2)^2 = 9$
albo
- zapisanie równości $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$
albo
- obliczenie x_1 i x_2 : $x_1 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4}$, $x_2 = \frac{2m-3+|2m-1|}{4}$ oraz zapisanie równania $|x_1 - x_2| = 3$ w postaci alternatywy $x_1 - x_2 = 3$ lub $x_1 - x_2 = -3$.

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania 2 pkt

- Doprowadzenie równania $(x_1 - x_2)^2 = 9$ do postaci $4m^2 - 4m - 35 = 0$
albo
- zapisanie równania $|x_1 - x_2| = 3$ w postaci $\frac{|2m-1|}{2} = 3$
albo
- doprowadzenie równań $x_1 - x_2 = 3$ i $x_1 - x_2 = -3$ do postaci $-\frac{|2m-1|}{2} = 3$
i $-\frac{|2m-1|}{2} = -3$.

Rozwiązanie pełne części b) 3 pkt

- Rozwiązanie równania $4m^2 - 4m - 35 = 0$: $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{7}{2}$
albo
- rozwiązanie równania $\frac{|2m-1|}{2} = 3$: $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{7}{2}$
albo
- rozwiązanie alternatywy równań: $-\frac{|2m-1|}{2} = 3$ lub $-\frac{|2m-1|}{2} = -3$:
 $m = \frac{7}{2}$ lub $m = -\frac{5}{2}$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i konsekwentnie do tych błędów wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności i równania, to otrzymuje **4 punkty**.

III sposób rozwiązania (rozkład na czynniki)

Równanie $2x^2 + (3 - 2m)x - m + 1 = 0$ doprowadzamy do postaci iloczynowej kolejno otrzymując:

$$2x^2 + 3x - 2mx - m + 1 = 0$$

$$2x^2 + x + 2x + 1 - 2mx - m = 0$$

$$x(2x + 1) + (2x + 1) - m(2x + 1) = 0$$

$$(2x + 1)(x + 1 - m) = 0.$$

Zatem dla każdej wartości parametru m równanie ma pierwiastki:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = m - 1.$$

Warunek $|x_1 - x_2| = 3$ ma zatem postać $\left| m - 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = 3$, czyli $\left| m - \frac{1}{2} \right| = 3$.

Stąd $m - \frac{1}{2} = 3$ lub $m - \frac{1}{2} = -3$ i ostatecznie $m = 3\frac{1}{2}$ lub $m = -2\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zapisanie równania w postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.: $2x^2 + x + 2x + 1 - 2mx - m = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie równania w postaci iloczynowej: $(2x + 1)(x + 1 - m) = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie x_1 i x_2 : $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = m - 1$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Rozwiązanie równania $|x_1 - x_2| = 3$: $m = 3\frac{1}{2}$ lub $m = -2\frac{1}{2}$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i konsekwentnie do tych błędów rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 5. (0-5)

Użycie i tworzenie strategii	Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i wzoru na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu (IV.5.c)
------------------------------	--

Rozwiązanie

Szukamy odpowiedzi na pytanie: dla jakiej największej wartości n suma S_n początkowych kolejnych n wyrazów tego ciągu spełnia nierówność $S_n < 2012$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$,

więc otrzymujemy nierówność $\frac{2(-2) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n < 2012$.

Stąd $\frac{(3n-7)n}{2} < 2012$ i następnie $3n^2 - 7n - 4024 < 0$.

Miejscami zerowymi trójmianu $3n^2 - 7n - 4024$ są liczby

$$n_1 = \frac{7 - \sqrt{48337}}{6} \text{ oraz } n_2 = \frac{7 + \sqrt{48337}}{6}.$$

Zatem szukane n jest największą liczbą całkowitą dodatnią z przedziału (n_1, n_2) .

Przybliżona wartość $n_2 \approx \frac{7 + 219,86}{6} \approx 37,81$, więc szukaną wartością jest $n = 37$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze

do pełnego rozwiązania zadania1 pkt

Zapisanie nierówności (lub równania) z jedną niewiadomą:

$$\frac{2(-2) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n < 2012 \quad \text{lub} \quad \frac{-2 + (3n-5)}{2} \cdot n < 2012 \quad \text{lub} \quad \frac{2(-2) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n = 2012.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Doprowadzenie nierówności kwadratowej lub równania kwadratowego do postaci ogólnej:

$$3n^2 - 7n - 4024 < 0 \quad \text{lub} \quad 3n^2 - 7n - 4024 = 0.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Rozwiązanie nierówności $3n^2 - 7n - 4024 < 0$ lub równania $3n^2 - 7n - 4024 = 0$:

$$n \in \left(\frac{7 - \sqrt{48337}}{6}, \frac{7 + \sqrt{48337}}{6} \right) \quad \text{lub} \quad n_1 = \frac{7 - \sqrt{48337}}{6}, \quad n_2 = \frac{7 + \sqrt{48337}}{6}.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają

poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- Poprawne rozwiązanie nierówności kwadratowej lub równania kwadratowego,

a następnie błędy rachunkowe w oszacowaniu liczby $n_2 = \frac{7 + \sqrt{48337}}{6}$

i konsekwentne do tych błędów podanie odpowiedzi (o ile liczba $n \geq 1$)

albo

- błędy rachunkowe podczas przekształcania nierówności $\frac{2(-2) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n < 2012$

lub $\frac{-2 + (3n-5)}{2} \cdot n < 2012$ (lub równania) i konsekwentne do tych błędów podanie odpowiedzi (o ile trójmian kwadratowy ma dwa pierwiastki, a liczba n jest całkowita dodatnia).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zapisanie, że największą liczbą n dla której $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2012$ jest $n = 37$.

Uwaga

Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, sprawdzi, że liczba $n = 37$ spełnia podaną nierówność, oraz sprawdzi, że liczba $n = 38$ nie spełnia tej nierówności, to otrzymuje **5 punktów**.

Zadanie 6. (0-3)

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (V.2.b)
----------------------------	---

Rozwiązanie

Obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu obu stron nierówności do potęgi drugiej otrzymujemy nierówność równoważną

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

Po otwarciu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy nierówność

$$2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2, \text{ a następnie } a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0, \text{ czyli } (ad - bc)^2 \geq 0.$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b, c, d , co kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy przekształci nierówność do postaci równoważnej $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy doprowadzi nierówność do postaci $2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 3 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 7. (0-4)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie zadania dotyczącego wzajemnego położenia prostej i okręgu (IV.8.b.R)
------------------------------	--

I sposób rozwiązania

Obliczamy współrzędne środka okręgu i długość promienia okręgu: $S = (2, 2)$, $r = 2$.

Zapisujemy równanie okręgu: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Okrąg jest styczny do prostej l w punkcie $C = (1, a)$, więc współrzędne tego punktu spełniają równanie okręgu $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

$$(1 - 2)^2 + (a - 2)^2 = 4, \quad (a - 2)^2 = 3, \quad |a - 2| = \sqrt{3}.$$

$$\text{Stąd } a = 2 + \sqrt{3} \text{ lub } a = 2 - \sqrt{3}.$$

$$a = 2 - \sqrt{3} \text{ nie spełnia warunku zadania, więc } C = (1, 2 + \sqrt{3}).$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej CS : $m = -\sqrt{3}$.

Wyznaczamy równanie prostej l prostopadłej do prostej CS i przechodzącej przez punkt C .

$$l: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

$$2 + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + b$$

$$b = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

A zatem prosta $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

II sposób rozwiązania

Podobnie, jak w I sposobie rozwiązania, znajdujemy współrzędne punktu C : $C = (1, 2 + \sqrt{3})$.

Następnie obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{CS} = [1, -\sqrt{3}]$.

Wyznaczamy równanie prostej l prostopadłej do wektora $\overrightarrow{CS}$ i przechodzącej przez punkt C .

$$l: (x-1) - \sqrt{3}(y-2-\sqrt{3}) = 0, \text{ czyli } l: x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} + 2 = 0.$$

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Zapisanie równania okręgu: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu C : $C = (1, 2 + \sqrt{3})$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej CS : $m = -\sqrt{3}$ lub obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{CS} = [1, -\sqrt{3}]$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Wyznaczenie równania prostej l i zapisanie go w postaci kierunkowej $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

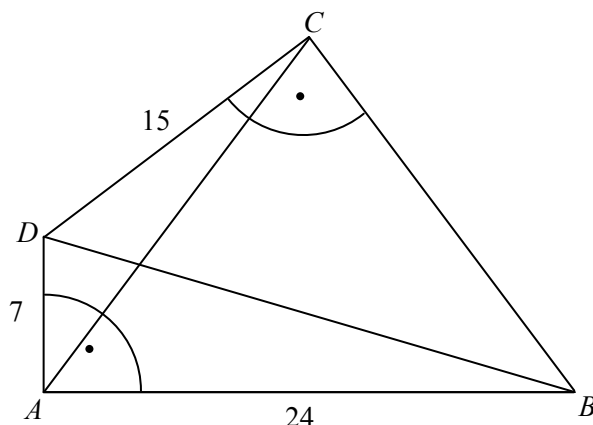
lub ogólnej $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} + 2 = 0$.

Uwaga:

Jeżeli zdający nie odrzuci $a = 2 - \sqrt{3}$ i rozwiąże zadanie do końca podając równania dwóch prostych, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 8. (0-5)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii (III.7.d.R)
------------------------------	--

Rozwiązanie

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BAD mamy

$$|BD| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD mamy

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 - |CD|^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = 20.$$

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 234.$$

Wariant I

Ponieważ BD jest wspólną przeciwprostokątną trójkątów prostokątnych ABD i BCD , więc na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, którego średnicą jest BD .

W okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ jest też wpisany trójkąt ABC . Z twierdzenia sinusów dla tego trójkąta wynika, że

$$\frac{|AC|}{\sin |\sphericalangle ABC|} = |BD|, \text{ stąd } |AC| = |BD| \cdot \sin |\sphericalangle ABC| = 25 \sin (|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC|).$$

Stąd i ze wzoru na sinus sumy kątów mamy

$$|AC| = 25 (\sin |\sphericalangle ABD| \cos |\sphericalangle DBC| + \cos |\sphericalangle ABD| \sin |\sphericalangle DBC|) = 25 \left(\frac{7}{25} \cdot \frac{20}{25} + \frac{24}{25} \cdot \frac{15}{25} \right) = 20.$$

Wariant II

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos |\sphericalangle ABC|.$$

$$\begin{aligned} \cos |\sphericalangle ABC| &= \cos (|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC|) = \cos |\sphericalangle ABD| \cdot \cos |\sphericalangle DBC| - \sin |\sphericalangle ABD| \cdot \sin |\sphericalangle DBC| = \\ &= \frac{24}{25} \cdot \frac{20}{25} - \frac{7}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{375}{25 \cdot 25} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } |AC|^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \frac{3}{5} = 576 + 400 - 576 = 400, \text{ czyli } |AC| = 20.$$

Wariant III

Korzystamy z twierdzenia Ptolemeusza:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \text{ czyli } |AC| \cdot 25 = 24 \cdot 15 + 20 \cdot 7 = 500.$$

Stąd $|AC| = 20$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Obliczenie długości przekątnej BD : $|BD| = 25$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie długości boku BC oraz pola czworokąta: $P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = 234$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy pole czworokąta $ABCD$ popełniając błędy rachunkowe i na tym poprzestanie lub dalej błędnie rozwiązuje zadanie, to otrzymuje **1 punkt**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

- Zauważenie, że przekątna BD jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ (czyli również na trójkącie ABC) i zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczenia

$$\text{przekątnej } AC: \frac{|AC|}{\sin \angle ABC} = |BD|$$

albo

- zastosowanie twierdzenia cosinusów do obliczenia przekątnej AC :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos \angle ABC$$

albo

- zastosowanie twierdzenia Ptolemeusza do obliczenia przekątnej AC :

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają

poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Obliczenie długości przekątnej AC z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie długości przekątnej AC : $|AC| = 20$.

Zadanie 9. (0-3)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.R)
------------------------------	---

I sposób rozwiązania (konsekwencje reguły dodawania)

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Oznaczamy przez A_k zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez k . Mamy obliczyć $|A_6 \cup A_{15}|$.

$$|A_6 \cup A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_6 \cap A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_{30}|.$$

Teraz wystarczy obliczyć, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6, następnie podzielnych przez 15 i następnie przez 30.

Kolejne 900 liczb całkowitych można podzielić na 150 pełnych szóstek (czyli kolejnych sześć liczb całkowitych). W każdej takiej szóstce jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 6. Wynika stąd, że trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 6 jest dokładnie 150.

Rozumując analogicznie stwierdzamy, że trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 15 jest 60, a trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 30 jest 30.

Stąd $|A_6 \cup A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_{30}| = 150 + 60 - 30 = 180$.

Liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

II sposób rozwiązania (diagram Venna)

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Oznaczamy przez A_k zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez k .

Rysujemy diagram Venna dla A_6 i A_{15} .

Wpisujemy liczby elementów poszczególnych parami rozłącznych zbiorów zaczynając od $|A_6 \cap A_{15}| = |A_{30}| = 30$, a następnie korzystając z faktów, że $|A_6| = 150$ i $|A_{15}| = 60$ wpisujemy liczby w pozostałe zbiory i zapisujemy odpowiedź:

liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

III sposób rozwiązania

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Stwierdzamy, że liczb trzycyfrowych podzielnych przez 6 jest 150, liczb trzycyfrowych podzielnych przez 15 jest 60 oraz, że dodając te liczby policzyliśmy liczby podzielne przez 30 dwa razy. Stąd wynika, że liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy stosuje poprawną metodę rozwiązania zadania i popełnia błędy w obliczeniu $|A_6|$ lub $|A_{15}|$.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy stosując poprawną metodę rozwiązania zadania obliczy $|A_6|$ oraz $|A_{15}|$ i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy $|A_{30}|$.

Zdający otrzymuje3 pkt
gdy rozwiąże zadanie bezbłędnie.

Zadanie 10. (0-4)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (IV.8.e, 4.k)
------------------------------	---

Rozwiązanie

Każdy punkt P należący do prostej $y = 8x + 10$ ma współrzędne $(x, 8x + 10)$.

Wyznaczamy wzór funkcji f opisującej sumę $|AP|^2 + |BP|^2$:

$f(x) = (3 - x)^2 + (12 + 8x)^2 + (11 - x)^2 + (6 + 8x)^2$, stąd $f(x) = 130x^2 + 260x + 310$.

Ponieważ parabola, będąca wykresem otrzymanej funkcji kwadratowej f , ma ramiona skierowane do góry, to współrzędna x szukanego punktu P jest równa x_w tej paraboli.

$$x_w = \frac{-260}{2 \cdot 130} = -1.$$

Szukany punkt P należy do prostej $y = 8x + 10$, więc $P = (-1, 2)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1 pkt

Zapisanie za pomocą niewiadomej x współrzędnych punktu P : $P = (x, 8x + 10)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..2 pkt

Wyznaczenie wzoru funkcji f : $f(x) = 130x^2 + 260x + 310$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Obliczenie x , dla którego funkcja $f(x) = 130x^2 + 260x + 310$ przyjmuje wartość najmniejszą:

$$x = -1.$$

Rozwiązanie pełne4 pkt

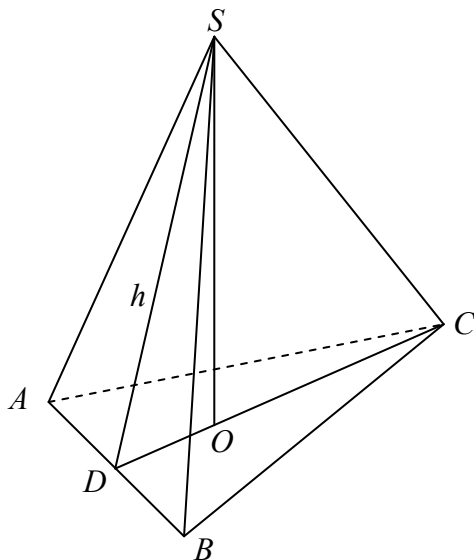
Podanie współrzędnych punktu P , dla którego suma $|AP|^2 + |BP|^2$ przyjmuje najmniejszą wartość: $P = (-1, 2)$.

Zadanie 11. (5 pkt)

Użycie i tworzenie strategii

Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (IV.9.b)

Rozwiązanie



Obliczamy pole trójkąta ABC .

Oznaczmy wysokość trójkąta ABC opuszczoną na podstawę AB przez h_{AB} . Wtedy z tw. Pitagorasa:

$$h_{AB} = \sqrt{|BC|^2 - \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36.$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540.$$

Z równości wysokości ścian bocznych ostrosłupa wynika, że punkt O – spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny ABC .

Obliczamy promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC ze wzoru $r = \frac{P_{ABC}}{p}$, gdzie p jest

połową obwodu trójkąta ABC : $r = \frac{540}{54}$, czyli $r = 10$.

Oznaczmy wysokość DS ściany bocznej ABS tego ostrosłupa przez h .

Następnie obliczamy wysokość $H = |OS|$ ostrosłupa $ABCS$: $H = \sqrt{h^2 - r^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

oraz jego objętość V : $V = \frac{1}{3} \cdot 540 \cdot 24 = 4320$.

Uwaga

Aby obliczyć pole trójkąta ABC , możemy także skorzystać ze wzoru Herona:

$$P_{ABC} = \sqrt{54 \cdot 24 \cdot 15 \cdot 15} = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 540.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1 pkt

Obliczenie pola P trójkąta ABC : $P_{ABC} = 540$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp3 pkt

Obliczenie promienia r okręgu wpisanego w trójkąt ABC : $r = 10$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania4 pkt

Obliczenie wysokości H ostrosłupa $ABCS$: $H = 24$.

Rozwiązanie pełne5 pkt

Obliczenie objętości V ostrosłupa: $V = 4320$.

Zadanie 12. (0-3)

Rozumowanie i argumentacja	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c.d)
----------------------------	---

Rozwiązanie

Zdarzenia $A \cap B'$, $A' \cap B$ oraz $A \cap B$ są parami rozłączne i

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

Stąd i z faktu, że $P(A \cup B) \leq 1$ wynika, że

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) + P(A \cap B) \text{ czyli } P(A \cap B) \leq 0,7, \text{ co kończy dowód.}$$

Uwagi:

1. Zdający nie musi zapisywać, że $(A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

2. Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą diagramu Venna.

Schemat oceniania rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

- Zdający zapisze, że $P((A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B)) \leq 1$

albo

- zadający sporządzi diagram Venna, na którym zaznaczy zdarzenia $A' \cap B$ i $A \cap B'$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

- Zdający zapisze, że zdarzenia $A \cap B'$, $A' \cap B$, $A \cap B$ są parami rozłączne

albo

- zadający sporządzi diagram Venna, na którym zaznaczy zdarzenia $A' \cap B$ i $A \cap B'$ oraz zapisze, np.: $P(A' \cap B) + P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A \cup B)$, skąd wynika, że zdarzenia $A' \cap B$, $A \cap B'$, $A \cap B$ są parami rozłączne.

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zdający przeprowadzi pełny dowód.

Uwaga

Jeżeli zdający przeprowadzi pełny dowód, ale nie zapisze, że podane zdarzenia są parami rozłączne, to otrzymuje **2 punkty**.