

**Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie**

# **EGZAMIN MATURALNY 2011**

## **MATEMATYKA**

### **POZIOM ROZSZERZONY**

#### **Kryteria oceniania odpowiedzi**

**MAJ 2011**

**Zadanie 1. (0–4)**

| Obszar standardów            | Opis wymagań                                      |
|------------------------------|---------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Wykorzystanie cech podzielności liczb całkowitych |

**Rozwiązanie**

Przekształcamy wyrażenie  $k^6 - 2k^4 + k^2$  do postaci iloczynowej:

$$k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = k^2(k^2 - 1)^2 = [(k-1)k(k+1)]^2.$$

Wykazujemy, że dla każdej liczby całkowitej  $k$  liczba  $(k-1)k(k+1)$  jest podzielna przez 6.

**Aby wykazać podzielność liczby rozpatrujemy jeden z trzech sposobów:**

- sposób I**

Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jest co najmniej jedna liczba parzysta i dokładnie jedna liczba podzielna przez 3. Kwadrat iloczynu tych liczb jest podzielny przez 36.

Zatem liczba postaci  $k^6 - 2k^4 + k^2$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, dzieli się przez 36.

- sposób II**

Pokazujemy podzielność przez 2 i przez 3:

1) podzielność przez 2

dla  $k$  – parzystego czyli  $k = 2m$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, otrzymujemy

$$(k-1)k(k+1) = (2m-1)2m(2m+1) = 2(2m-1)m(2m+1)$$

dla  $k$  – nieparzystego czyli  $k = 2m+1$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy

$$(k-1)k(k+1) = 2m(2m+1)(2m+2),$$

zatem w każdym przypadku liczba  $(k-1)k(k+1)$  jest podzielna przez 2,

2) podzielność przez 3

dla  $k = 3m$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy

$$(k-1)k(k+1) = (3m-1)3m(3m+1) = 3(3m-1)m(3m+1)$$

dla  $k = 3m+1$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy

$$(k-1)k(k+1) = 3m(3m+1)(3m+2)$$

dla  $k = 3m+2$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy

$$(k-1)k(k+1) = (3m+1)(3m+2)(3m+3) = 3(3m+1)(3m+2)(m+1),$$

zatem w każdym przypadku liczba  $(k-1)k(k+1)$  jest podzielna przez 3.

Ponieważ liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, a liczby 2 i 3 są względnie pierwsze, więc liczba  $(k-1)k(k+1)$  jest podzielna przez 6.

Kwadrat tej liczby jest podzielny przez 36.

Zatem liczba  $k^6 - 2k^4 + k^2$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, dzieli się przez 36.

- sposób III**

Pokazujemy podzielność przez 6 na podstawie przypadków:

dla  $k = 6m$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy

$$(k-1)k(k+1) = (6m-1)6m(6m+1) = 6(6m-1)m(6m+1)$$

dla  $k = 6m+1$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy

$$(k-1)k(k+1) = 6m(6m+1)(6m+2)$$

dla  $k = 6m + 2$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy  
 $(k-1)k(k+1) = (6m+1)(6m+2)(6m+3) = 6(6m+1)(3m+1)(2m+1)$   
 dla  $k = 6m + 3$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy  
 $(k-1)k(k+1) = (6m+2)(6m+3)(6m+4) = 6(3m+1)(2m+1)(6m+4)$   
 dla  $k = 6m + 4$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy  
 $(k-1)k(k+1) = (6m+3)(6m+4)(6m+5) = 6(2m+1)(3m+2)(6m+5)$   
 dla  $k = 6m + 5$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, mamy  
 $(k-1)k(k+1) = (6m+4)(6m+5)(6m+6) = 6(6m+4)(6m+5)(m+1)$ ,  
 zatem w każdym przypadku liczba  $(k-1)k(k+1)$  jest podzielna przez 6.  
 Kwadrat tej liczby jest podzielny przez 36.  
 Zatem liczba  $k^6 - 2k^4 + k^2$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, dzieli się przez 36.

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest postęp ..... 1 pkt**

Zapisanie liczby  $n^2 = k^6 - 2k^4 + k^2$  w jednej z następujących postaci iloczynowych:

$$k^2(k^2-1)^2 \text{ lub } [k(k^2-1)]^2 \text{ lub } [k(k-1)(k+1)]^2 \text{ lub } k^2[(k-1)(k+1)]^2 \text{ lub } (k^3-k)^2.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wykazanie podzielności liczby  $n$  przez 2 albo przez 3.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wykazanie podzielności liczby  $n$  przez 2 i przez 3 albo stwierdzenie, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6.

### **Uwaga**

Zdający może zauważyć, że  $(k+1)k(k-1) = 6 \cdot \binom{k+1}{3}$ . Przyznajemy wtedy **3 punkty** i nie

wymagamy wyjaśnienia, że został tu użyty uogólniony współczynnik dwumianowy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Wyciągnięcie wniosku o podzielności liczby  $n^2$  przez 36.

### **Zadanie 2. (0–4)**

|                            |                                                 |
|----------------------------|-------------------------------------------------|
| Rozumowanie i argumentacja | Przekształcenie równoważne wyrażenia wymiernego |
|----------------------------|-------------------------------------------------|

### **I sposób rozwiązania**

Przekształcamy tezę w sposób równoważny.

Mnożymy obie strony równości  $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$  przez  $(a-c)(b-c)$ , otrzymując:

$$a(b-c) + b(a-c) = 2(a-c)(b-c), \text{ czyli } ab - ac + ab - bc = 2ab - 2ac - 2bc + 2c^2.$$

Stąd otrzymujemy  $2c^2 - ac - bc = 0$ , czyli  $c(2c - a - b) = 0$ .

Ta ostatnia równość jest prawdziwa, bo z założenia  $2c - a - b = 0$ . Zatem teza też jest prawdziwa.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ..... 1 pkt**Sprowadzenie lewej strony równości do wspólnego mianownika:  $\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)} = 2$ .**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**Przekształcenie równości  $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$  do postaci

$$a(b-c)+b(a-c)=2(a-c)(b-c).$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt**Wykonanie działań i doprowadzenie równości do postaci np.:  $2c^2 - ac - bc = 0$ .**Rozwiązanie pełne..... 4 pkt**Uzasadnienie, że  $c(2c-a-b)=0$  i wnioskowanie o prawdziwości równości

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2.$$

**II sposób rozwiązania**Z równania  $a+b=2c$  wyznaczamy  $b=2c-a$  i wstawiamy do wyrażenia:

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{a}{a-c} + \frac{2c-a}{2c-a-c} = \frac{a}{a-c} + \frac{2c-a}{c-a} = \frac{a-(2c-a)}{a-c} = \frac{2(a-c)}{a-c} = 2.$$

**Uwaga**Z równania  $a+b=2c$  można także wyznaczyć zmienną  $a$  lub  $c$ .**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ..... 1 pkt**Sprowadzenie lewej strony równości do wspólnego mianownika:  $\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)} = 2$ .**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**Wyznaczenie z założenia  $a+b=2c$ , np.  $b$  i doprowadzenie wyrażenia do postaci

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{a}{a-c} + \frac{2c-a}{2c-a-c} = \frac{a}{a-c} + \frac{2c-a}{c-a}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt**Wykonanie działań i doprowadzenie wyrażenia do postaci np.:  $\frac{a-(2c-a)}{a-c}$ .**Rozwiązanie pełne..... 4 pkt**Przekształcenie wyrażenia do postaci  $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{2(a-c)}{a-c} = 2$ .**III sposób rozwiązania**Z równania  $a+b=2c$  otrzymujemy  $a-c=c-b$ , więc ciąg  $a, c, b$  jest ciągiem arytmetycznym.

$$c = a + r \quad b = a + 2r$$

Wstawiamy do wyrażenia

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{a}{a-(a+r)} + \frac{a+2r}{a+2r-(a+r)} = \frac{a}{-r} + \frac{a+2r}{r} = \frac{-a+a+2r}{r} = \frac{2r}{r} = 2$$

### **Uwaga**

Zdający może zauważyć, że  $a - c = c - b$  i przekształcić wyrażenie bez wprowadzania  $r$ ,

$$\text{np. } \frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{a}{c-b} + \frac{b}{b-c} = \frac{a-b}{c-b} = \frac{2c-b-b}{c-b} = \frac{2c-2b}{c-b} = 2.$$

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki..... 1 pkt**

Zapisanie, że liczby  $a, c, b$  tworzą ciąg arytmetyczny.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Doprowadzenie wyrażenia do postaci, np.  $\frac{a}{a-(a+r)} + \frac{a+2r}{a+2r-(a+r)}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wykonanie działań i doprowadzenie wyrażenia do postaci  $\frac{a}{-r} + \frac{a+2r}{r}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Przekształcenie wyrażenia do postaci  $\frac{-a+a+2r}{r} = \frac{2r}{r} = 2$ .

### **Zadanie 3. (0–6)**

|                              |                                                                                                                                 |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem z zastosowaniem wzorów Viète'a, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### **I sposób rozwiązania**

Zapisujemy warunki jakie muszą być spełnione, aby równanie

$$x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$$

posiadało dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$  takie, że  $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 < 8(m+1) \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ .

$$16m^2 - 4(-m^3 + 6m^2 + m - 2) > 0$$

$$m^3 - 2m^2 - m + 2 > 0$$

$$(m+1)(m-1)(m-2) > 0.$$

Zatem  $m \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ .

Rozwiązujemy nierówność  $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ , korzystając ze wzorów Viète'a.

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 < 8m + 8$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 < 8m + 8$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 < 8m + 8$$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 8m + 8$ . Ponieważ  $x_1 + x_2 = 4m$  oraz  $x_1 \cdot x_2 = -m^3 + 6m^2 + m - 2$ , więc

$$(4m)^2 - 4(-m^3 + 6m^2 + m - 2) < 8m + 8.$$

Przekształcamy tę nierówność do postaci  $4m^3 - 8m^2 - 12m < 0$

stąd  $4m(m-3)(m+1) < 0$ .

Rozwiązaniem nierówności jest

$$m \in (-\infty, -1) \cup (0, 3).$$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych zbiorów rozwiązań nierówności:

$$\Delta > 0 \text{ i } (x_1 - x_2)^2 < 8(m+1).$$

$$\text{Stąd } m \in (0, 1) \cup (2, 3).$$

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ . Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający zapisze  $\Delta \geq 0$ , to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności  $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ . Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje za

- zapisanie wyrażenia  $(x_1 - x_2)^2$  w postaci  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$  lub  $\frac{\Delta}{a^2}$ .

**3 punkty** zdający otrzymuje za

- zapisanie nierówności  $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$  w postaci nierówności trzeciego stopnia z jedną niewiadomą  $m$ , np.  $4m^3 - 8m^2 - 12m < 0$ .

**4 punkty** zdający otrzymuje za

- rozwiązanie nierówności trzeciego stopnia:  $m \in (-\infty, -1) \cup (0, 3)$ .

**Rozwiązanie pełne (trzeci etap).....6 pkt**

Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:

$$m \in (0, 1) \cup (2, 3).$$

### **Uwaga**

Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu I i etapu II, gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) jest rozwiązana poprawnie.

### **II sposób rozwiązania**

Równanie  $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1$  i  $x_2$ , gdy  $\Delta > 0$ .

$$\text{Obliczamy } \Delta = 16m^2 - 4(-m^3 + 6m^2 + m - 2) = 4(m^3 - 2m^2 - m + 2).$$

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ .

$$m^3 - 2m^2 - m + 2 > 0$$

$$(m+1)(m-1)(m-2) > 0.$$

Zatem  $m \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ .

Następnie wyznaczamy pierwiastki  $x_1, x_2$ :

$$x_1 = \frac{4m - \sqrt{4(m^3 - 2m^2 - m + 2)}}{2}, \quad x_2 = \frac{4m + \sqrt{4(m^3 - 2m^2 - m + 2)}}{2}.$$

Wówczas

$$x_1 - x_2 = \frac{4m - 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2} - \frac{4m + 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{4m - 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2} - 4m - 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-4\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2} = -2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}$$

i stąd

$$(x_1 - x_2)^2 = (-2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2})^2 = 4(m^3 - 2m^2 - m + 2).$$

Z warunku  $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$  otrzymujemy nierówność  $4(m^3 - 2m^2 - m + 2) < 8(m+1)$ .

Stąd  $m^3 - 2m^2 - 3m < 0$ , czyli  $m(m^2 - 2m - 3) < 0$ ,  $m(m+1)(m-3) < 0$ .

Zatem  $m \in (-\infty, -1) \cup (0, 3)$ .

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych rozwiązań nierówności

$\Delta > 0$  i  $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ :  $m \in (0, 1) \cup (2, 3)$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający zapisze  $\Delta \geq 0$ , to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności  $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ . Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje za

- wyznaczenie  $x_1$  i  $x_2$ :  $x_1 = \frac{4m - \sqrt{4(m^3 - 2m^2 - m + 2)}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{4m + \sqrt{4(m^3 - 2m^2 - m + 2)}}{2}$ .

**2 punkty** zdający otrzymuje za

- zapisanie  $x_1 - x_2 = -2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}$ .

**3 punkty** zdający otrzymuje za

- obliczenie  $(x_1 - x_2)^2 = 4(m^3 - 2m^2 - m + 2)$  i zapisanie nierówności  
 $4(m^3 - 2m^2 - m + 2) < 8(m + 1)$ .

**4 punkty** zdający otrzymuje za

- rozwiązanie nierówności trzeciego stopnia:  $m \in (-\infty, -1) \cup (0, 3)$ .

**Rozwiązanie pełne (trzeci etap).....6 pkt**

Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:

$$m \in (0, 1) \cup (2, 3).$$

### Uwagi

1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu I i etapu II, gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) jest rozwiązana poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to otrzymuje **5 punktów**.

### **Zadanie 4. (0–4)**

|                              |                                         |
|------------------------------|-----------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania trygonometrycznego |
|------------------------------|-----------------------------------------|

### **I sposób rozwiązania**

Wyłączamy przed nawias  $2\sin^2 x$ :  $2\sin^2 x(1 - \cos x) = 1 - \cos x$  i zapisujemy równanie w postaci iloczynowej:  $2\sin^2 x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$ ,  $(2\sin^2 x - 1)(1 - \cos x) = 0$ .

Zatem  $2\sin^2 x - 1 = 0$  lub  $1 - \cos x = 0$ .

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{array}{lll} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos x = 1 \\ x = \frac{5}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{4}\pi & \text{lub } x = \frac{1}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{3}{4}\pi & \text{lub } x = 0 \text{ lub } x = 2\pi \\ \text{albo} & \text{albo} & \text{albo} \\ x = 225^\circ \text{ lub } x = 315^\circ & x = 45^\circ \text{ lub } x = 135^\circ & x = 0^\circ \text{ lub } x = 360^\circ \end{array}$$

Zatem rozwiązaniami równania  $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$  są:

$$x = 0 \text{ lub } x = \frac{1}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{3}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{5}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{4}\pi \text{ lub } x = 2\pi$$

albo

$$x = 0^\circ \text{ lub } x = 45^\circ \text{ lub } x = 135^\circ \text{ lub } x = 225^\circ \text{ lub } x = 315^\circ \text{ lub } x = 360^\circ.$$



### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie równania w postaci, np.

$$2\sin^2 x(1 - \cos x) = 1 - \cos x \text{ lub } 2\sin^2 x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0,$$

$$\text{lub } (2\sin^2 x - 1) - \cos x(2\sin^2 x - 1) = 0.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie równania w postaci alternatywy:

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}$  lub  $\cos x = 1$

- $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  lub  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , lub  $\cos x = 1$

- $\cos 2x = 0$  lub  $\cos x = 1$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Rozwiązanie jednego z otrzymanych równań.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania  $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$  w podanym przedziale:

$$x = 0, x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{5}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi, x = 2\pi$$

albo

$$x = 0^\circ, x = 45^\circ, x = 135^\circ, x = 225^\circ, x = 315^\circ, x = 360^\circ.$$

### **Uwagi**

1. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązania równania  $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$  bez uwzględnienia przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci  $2\sin^2 x(1 - \cos x) = 1 - \cos x$ , a następnie podzieli obie strony równania przez  $\cos x - 1$  bez odpowiedniego założenia i rozwiąże tylko równanie  $2\sin^2 x - 1 = 0$ , to za całe zadanie otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci  $2\sin^2 x(1 - \cos x) = 1 - \cos x$ , a następnie podzieli obie strony równania przez  $\cos x - 1$  zakładając, że  $\cos x \neq 1$ , rozwiąże tylko równanie  $2\sin^2 x - 1 = 0$  i nie rozpatrzy równania  $\cos x = 1$ , to za całe zadanie otrzymuje **2 punkty**.

### **II sposób rozwiązania**

Zapisujemy równanie za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej  
 $2(1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 1 - \cos x$  i przekształcamy do postaci

$$2 - 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x - 1 + \cos x = 0$$

$$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0.$$

Następnie zapisujemy to równanie w postaci iloczynowej

$$(2\cos^2 x - 1)(\cos x - 1) = 0.$$

Zatem

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \text{ lub } \cos x - 1 = 0.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{array}{lll} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos x = 1 \\ x = \frac{3}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{5}{4}\pi & \text{lub } x = \frac{1}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{4}\pi, & \text{lub } x = 0 \text{ lub } x = 2\pi \\ \text{albo} & \text{albo} & \text{albo} \\ x = 135^\circ \text{ lub } x = 225^\circ & x = 45^\circ \text{ lub } x = 315^\circ & x = 0^\circ \text{ lub } x = 360^\circ \end{array}$$

Zatem rozwiązaniami równania  $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$  są:

$$x = 0 \text{ lub } x = \frac{1}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{3}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{5}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{4}\pi \text{ lub } x = 2\pi$$

albo

$$x = 0^\circ \text{ lub } x = 45^\circ \text{ lub } x = 135^\circ \text{ lub } x = 225^\circ \text{ lub } x = 315^\circ \text{ lub } x = 360^\circ.$$

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt**

Zapisanie równania w postaci iloczynowej, np.

$$(2\cos^2 x - 1)(\cos x - 1) = 0 \text{ lub } (\sqrt{2}\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Zapisanie równania w postaci alternatywy:

- $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  lub  $\cos x = 1$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  lub  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , lub  $\cos x = 1$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Rozwiązanie jednego z otrzymanych równań.

**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania  $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$  w podanym przedziale:

$$x = 0, x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{5}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi, x = 2\pi$$

albo

$$x = 0^\circ, x = 45^\circ, x = 135^\circ, x = 225^\circ, x = 315^\circ, x = 360^\circ.$$

### **Uwagi**

1. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązania równania  $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$  bez uwzględnienia przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci  $2\cos^2 x(\cos x - 1) = \cos x - 1$ , a następnie podzieli obie strony równania przez  $\cos x - 1$  bez odpowiedniego założenia i rozwiąże tylko równanie  $2\cos^2 x - 1 = 0$ , to za całe zadanie otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci  $2\cos^2 x(\cos x - 1) = \cos x - 1$ , a następnie podzieli obie strony równania przez  $\cos x - 1$  zakładając, że  $\cos x \neq 1$ , rozwiąże tylko równanie  $2\cos^2 x - 1 = 0$  i nie rozpatrzy równania  $\cos x = 1$ , to za całe zadanie otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 5. (0–4)**

|                              |                                                                                                                            |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Zastosowanie własności ciągu geometrycznego, wzorów na $n$ -ty wyraz tego ciągu i na sumę $n$ wyrazów ciągu arytmetycznego |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równość:  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{x_{n+1}}}{3^{x_n}} = 3^{x_{n+1}-x_n}$ .

Zatem  $27 = 3^{x_{n+1}-x_n}$ . Stąd  $x_{n+1} - x_n = 3$  dla  $n \geq 1$ .

Zauważamy, że jeśli dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ :  $x_{n+1} - x_n = 3$ , to ciąg  $(x_n)$  jest arytmetyczny o różnicy  $r = 3$ .

Z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} x_1 + (x_1 + r) + \dots + (x_1 + 9r) = 145 \\ r = 3 \end{cases}$$

Doprowadzamy układ do postaci:  $\begin{cases} 10x_1 + 45r = 145 \\ r = 3 \end{cases}$  i podstawiamy  $r = 3$  do pierwszego

równania. Otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą:  $10x_1 + 135 = 145$ . Stąd  $x_1 = 1$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie odpowiedniego równania, np.

$$27 = 3^{x_{n+1}-x_n}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie zależności między dwoma kolejnymi wyrazami ciągu  $(x_n)$ :  $x_{n+1} - x_n = 3$

(wystarczy zapis, np.  $x_2 - x_1 = 3$ ).

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie układu równań

$$\begin{cases} x_1 + (x_1 + r) + \dots + (x_1 + 9r) = 145 \\ r = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \frac{2x_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 145 \\ r = 3 \end{cases}, \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 10x_1 + 45r = 145 \\ r = 3 \end{cases},$$

lub równania  $x_1 + (x_1 + 3) + \dots + (x_1 + 27) = 145$  i przekształcenie do równania w postaci, np.:  $10x_1 + 135 = 145$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie  $x_1$ :  $x_1 = 1$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający pomyli własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**II sposób rozwiązania**

Z warunków zadania zapisujemy równość:  $3^{x_1+x_2+\dots+x_n} = 3^{145}$ .

Zatem

$$3^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot \dots \cdot 3^{x_n} = 3^{145}$$

Korzystając z tego, że ciąg  $(a_n)$  jest geometryczny o ilorazie  $q = 27$  otrzymujemy

$$3^{x_1} \cdot 3^{x_1} \cdot 27 \dots \cdot 3^{x_1} \cdot 27^9 = 3^{145}$$

Stąd

$$3^{10x_1} \cdot 27^{1+2+\dots+9} = 3^{145}$$

$$3^{10x_1} \cdot 3^{3 \cdot 45} = 3^{145}$$

$$3^{10x_1+135} = 3^{145}$$

$$10x_1 + 135 = 145$$

$$10x_1 = 10$$

$$x_1 = 1$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt**

Wykorzystanie warunków zadania i zapisanie równości:  $3^{x_1+x_2+\dots+x_n} = 3^{145}$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie równania:

$$3^{x_1} \cdot 3^{x_1} \cdot 27 \dots \cdot 3^{x_1} \cdot 27^9 = 3^{145}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

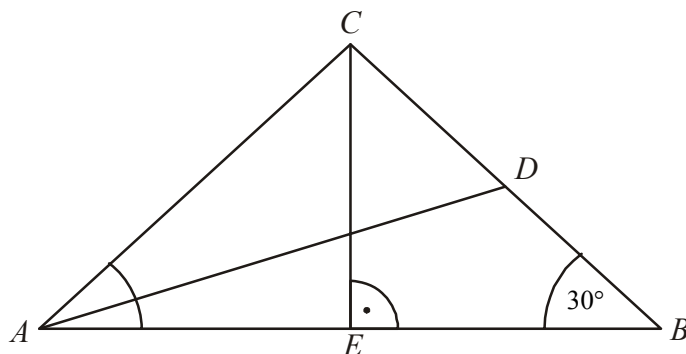
Przekształcenie równania do postaci:  $10x_1 + 135 = 145$ .

**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

Obliczenie  $x_1$ :  $x_1 = 1$ .

**Zadanie 6. (0–4)**

|                              |                                                                                  |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Z treści zadania wynika, że  $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$  i  $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$  oraz  $|BE| = 4$ .

Z trójkąta prostokątnego  $BEC$  otrzymujemy:  $\cos 30^\circ = \frac{|BE|}{|BC|}$ .

Zatem  $\frac{4}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Stąd  $|BC| = \frac{8}{\sqrt{3}}$  i  $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

Obliczamy  $|AD|$ , stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta  $ABD$ .

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB| \cdot |BD| \cdot \cos \sphericalangle ABD,$$

$$|AD|^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$|AD|^2 = 64 + \frac{16}{3} - 32 = \frac{16 \cdot 7}{3}.$$

$$\text{Stąd } |AD| = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{21}.$$

#### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń i obliczenie długości odcinka  $BC$  lub  $CE$ :

$$|BC| = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ lub } |CE| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Obliczenie długości odcinka  $BD$ :  $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABD$ :

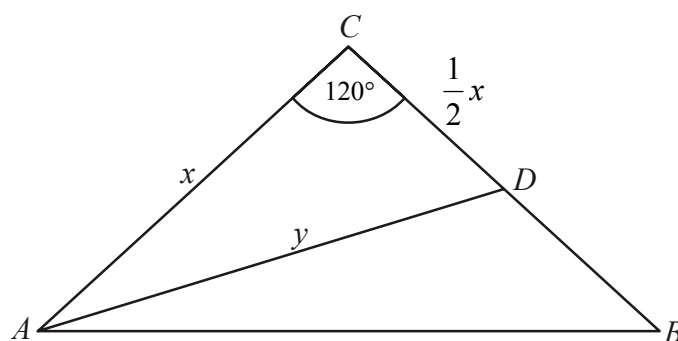
$$|AD|^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ$$

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Wyznaczenie długości środkowej  $AD$ :  $|AD| = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ .

#### **Uwaga**

Jeśli zdający błędnie wyznaczy wartość  $\cos 30^\circ$  i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

**II sposób rozwiązania**

Wprowadzamy oznaczenia:  $x$  – długość ramienia trójkąta  $ABC$ ,  
 $y$  – długość środkowej  $AD$  tego trójkąta.

Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta  $ABC$ , gdzie  $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$ :

$$8^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos 120^\circ. \text{ Przekształcamy równanie do postaci } 64 = 2x^2 + x^2.$$

Stąd otrzymujemy:  $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ . Ponieważ  $|CD| = \frac{1}{2}x$ , stąd  $|CD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

Obliczamy  $|AD|$ , stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta  $ADC$ :

$$y^2 = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$y^2 = \frac{64}{3} + \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \frac{112}{3}. \text{ Stąd otrzymujemy } y = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$ ,

np.  $8^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos 120^\circ$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Obliczenie  $x$  lub  $x^2$ :  $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ ,  $x^2 = \frac{64}{3}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ADC$ :

$$y^2 = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ$$

albo

$$y^2 = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{64}{3} + \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \frac{112}{3}.$$

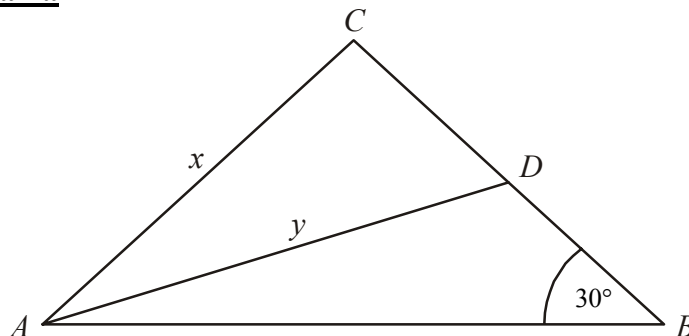
**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

Wyznaczenie długości środkowej  $AD$ :  $y = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ .

**Uwaga**

Jeśli zdający błędnie wyznaczy wartość  $\cos 120^\circ$  (np. zapomina o znaku) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

### III sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia:  $x$  – długość ramienia trójkąta  $ABC$ ,

$y$  – długość środkowej  $AD$  tego trójkąta.

Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta  $ABC$ , gdzie  $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$

$$x^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 30^\circ.$$

Przekształcamy równanie do postaci:  $64 = 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Stąd otrzymujemy:  $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ . Ponieważ  $|BD| = \frac{1}{2}x$ , stąd  $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

Obliczamy  $|AD|$  stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta  $ABD$ :

$$y^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ, \quad y^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 64 + \frac{16}{3} - 32 = \frac{112}{3}.$$

Stąd otrzymujemy  $y = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ .

#### Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$ ,

np.  $x^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 30^\circ$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Obliczenie  $x$  lub  $x^2$ :  $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ ,  $x^2 = \frac{64}{3}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ADC$ :

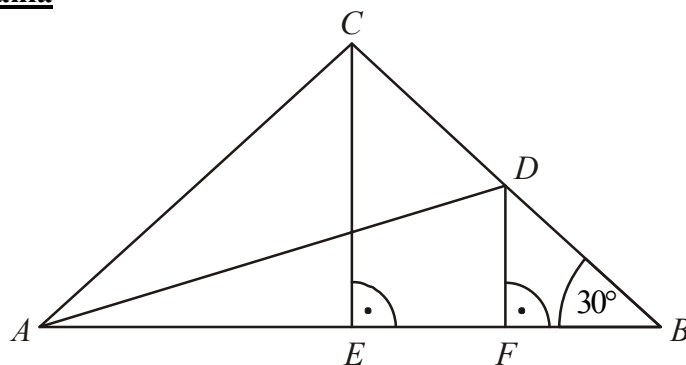
$$y^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ.$$

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Wyznaczenie długości środkowej  $y$ :  $y = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ .

#### Uwaga

Jeśli zdający błędnie wyznaczy wartość  $\cos 30^\circ$  i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

**IV sposób rozwiązania**

Z treści zadania wynika, że  $|AE| = |EB| = 4$ . Ponieważ  $DF \parallel CE$  i  $D$  jest środkiem odcinka  $BC$ , to  $F$  jest środkiem odcinka  $EB$ . Stąd  $|FB| = 2$ .

Trójkąt  $BDF$  jest „połową” trójkąta równobocznego o wysokości  $FB$ , więc  $|FB| = \frac{2|DF|\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Stąd } |DF| = \frac{|FB|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ADF$  obliczamy długość środkowej  $AD$ :

$$|AD| = \sqrt{|AF|^2 + |DF|^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{112}{3}} = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}.$$

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....** 1 pkt

Obliczenie długości odcinka  $FB$ :  $|FB| = 2$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....** 2 pkt

Obliczenie długości odcinka  $DF$ :  $|DF| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....** 3 pkt

Zapisanie równości wynikającej twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ADF$ :

$$|AD|^2 = |AF|^2 + |DF|^2.$$

**Rozwiązanie pełne.....** 4 pkt

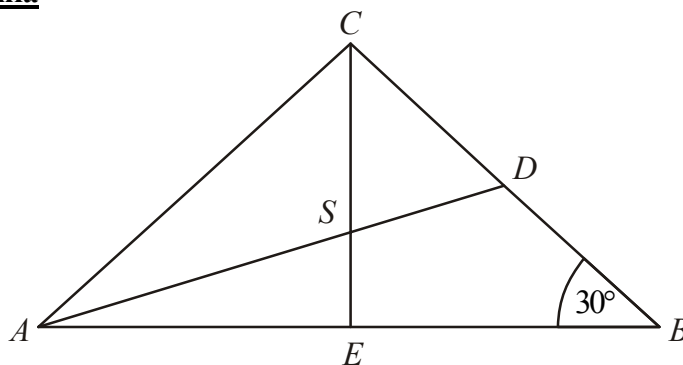
Wyznaczenie długości środkowej  $AD$ :  $|AD| = \sqrt{\frac{112}{3}} = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ .

**Uwaga**

Rozwiązanie analityczne jest zastosowaniem IV sposobu rozwiązania.



### V sposób rozwiązania



Z treści zadania wynika, że  $|AE| = |EB| = 4$ . Trójkąt  $CEB$  jest „połową” trójkąta równobocznego o wysokości  $FB$ , więc  $|EB| = \frac{2|CE|\sqrt{3}}{2}$ . Stąd  $|CE| = \frac{|EB|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

Z twierdzenia o środku ciężkości trójkąta wynika, że  $|AS| = \frac{2}{3}|AD|$  i  $|SE| = \frac{1}{3}|CE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ASE$  mamy:

$$|AS|^2 = |AE|^2 + |SE|^2 \text{ czyli } \left(\frac{2}{3}|AD|\right)^2 = 4^2 + \left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2.$$

Stąd

$$\frac{4}{9}|AD|^2 = 16 + \frac{16}{27}$$

$$\frac{4}{9}|AD|^2 = \frac{448}{27}$$

$$|AD| = \sqrt{\frac{112}{3}} = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}.$$

### Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Obliczenie długości odcinka  $CE$ :  $|CE| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie, że  $|AS| = \frac{2}{3}|AD|$  i  $|SE| = \frac{1}{3}|CE|$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie równości wynikającej z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ASE$ :

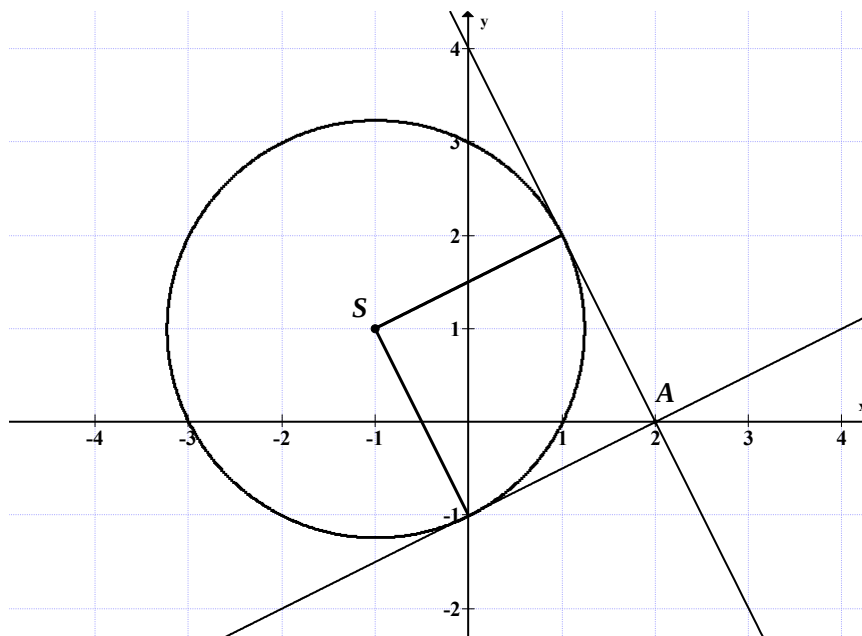
$$|AD|^2 = |AF|^2 + |DF|^2.$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Wyznaczenie długości środkowej  $AD$ :  $|AD| = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ .

**Zadanie 7. (0–4)**

|                              |                                                                       |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie zadania dotyczącego wzajemnego położenia prostej i okręgu |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania** (parametryczny)

Stwierdzamy, że prosta o równaniu  $x=2$  nie jest styczna do okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$  (odległość środka okręgu od tej prostej jest większa od promienia). Zapisujemy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt  $A = (2, 0)$ :

$y = a(x - 2)$  lub  $y = ax - 2a$  w zależności od parametru  $a$  (gdzie  $a$  jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej).

Zapisujemy układ równań  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \\ y = ax - 2a \end{cases}$  i doprowadzamy do równania

kwadratowego z niewiadomą  $x$ , np.  $x^2 + (ax - 2a)^2 + 2x - 2(ax - 2a) - 3 = 0$ . Prosta  $y = ax - 2a$  jest styczna do okręgu wtedy, gdy układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli gdy równanie kwadratowe  $x^2 + (ax - 2a)^2 + 2x - 2(ax - 2a) - 3 = 0$  ma dokładnie jedno rozwiązanie. Przekształcamy równanie

$$x^2 + a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 + 2x - 2ax + 4a - 3 = 0,$$

$$x^2(1 + a^2) + x(-4a^2 - 2a + 2) + 4a^2 + 4a - 3 = 0.$$

Zapisujemy warunek na to, aby równanie  $x^2(1 + a^2) + x(-4a^2 - 2a + 2) + 4a^2 + 4a - 3 = 0$  miało jedno rozwiązanie:  $\Delta = 0$ .

$$\text{Zatem } (-4a^2 - 2a + 2)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot (4a^2 + 4a - 3) = 0.$$

$$4(2a^2 + a - 1)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot (4a^2 + 4a - 3) = 0$$

$$\text{Stąd } 2a^2 + 3a - 2 = 0.$$

- rozwiązujemy równanie  $2a^2 + 3a - 2 = 0$ :

$$\Delta = 25$$

$$a_1 = -2 \text{ lub } a_2 = \frac{1}{2}.$$

Z tego, że  $a_1, a_2$  oznaczają współczynniki kierunkowe prostych stycznych i  $a_1 \cdot a_2 = -1$  wynika, że styczne są do siebie prostopadłe.

Stąd miara kąta między stycznymi jest równa  $90^\circ$ .

albo

- korzystamy ze wzorów Viète'a i zapisujemy  $a_1 \cdot a_2 = \frac{-2}{2} = -1$ , gdzie  $a_1$  i  $a_2$

są pierwiastkami równania  $2a^2 + 3a - 2 = 0$ .

Z tego, że  $a_1, a_2$  oznaczają współczynniki kierunkowe prostych stycznych i  $a_1 \cdot a_2 = -1$  wynika, że styczne są do siebie prostopadłe.

Stąd miara kąta między stycznymi jest równa  $90^\circ$ .

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zapisanie równania kierunkowego prostej przechodzącej przez punkt  $A = (2, 0)$  w postaci, np.:

$$y = a(x - 2) \text{ lub } y = ax - 2a, \text{ lub } ax - y - 2a = 0.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \\ y = ax - 2a \end{cases}$  i doprowadzenie do równania

kwadratowego z niewiadomą  $x$ , gdzie  $a$  jest parametrem, np.

$$x^2(1 + a^2) + x(-4a^2 - 2a + 2) + 4a^2 + 4a - 3 = 0.$$

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 3 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

- Obliczenie wartości parametru  $a$ , dla których równanie ma jedno rozwiązanie i zapisanie, że dla tych wartości  $a$  proste styczne są prostopadłe

albo

- Wykorzystanie wzorów Viète'a do zapisania  $a_1 \cdot a_2 = -1$  i stwierdzenie, że proste styczne są prostopadłe.

### **II sposób rozwiązania** (odległość punktu od prostej)

Przekształcamy równanie okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$  do postaci  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ .

Wyznaczamy współrzędne środka  $S$  i promień  $r$  tego okręgu:  $S = (-1, 1)$ ,  $r = \sqrt{5}$ .

Stwierdzamy, że prosta o równaniu  $x = 2$  nie jest styczna do okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ .

Zapisujemy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt  $A = (2, 0)$  i stycznej do okręgu:

$$y = a(x - 2) \text{ lub } y = ax - 2a \text{ lub } ax - y - 2a = 0 \text{ w zależności od parametru } a \text{ (gdzie } a \text{ oznacza współczynnik kierunkowy prostej stycznej).}$$

Wyznaczamy odległość środka  $S$  okręgu od prostej o równaniu  $ax - y - 2a = 0$ :

$$d = \frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Ponieważ promień okręgu jest równy odległości środka okręgu  $S$  od stycznej, więc otrzymujemy równanie

$$\sqrt{5} = \frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Przekształcamy to równanie

$$\sqrt{5a^2+5} = |-3a-1|$$

$$5a^2+5 = 9a^2+6a+1$$

$$4a^2+6a-4 = 0$$

stąd

$$2a^2+3a-2 = 0.$$

Dalej postępujemy jak w sposobie I.

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zapisanie równania prostej przechodzącej przez punkt  $A = (2, 0)$  i stycznej do okręgu w postaci, np.:  $y = a(x-2)$  lub  $y = ax - 2a$ , lub  $ax - y - 2a = 0$  (gdzie  $a$  oznacza współczynnik kierunkowy prostej stycznej).

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zapisanie równania  $\sqrt{5} = \frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}$ , gdzie  $S = (-1, 1)$  jest środkiem okręgu o promieniu

$$r = \sqrt{5}.$$

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 3 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

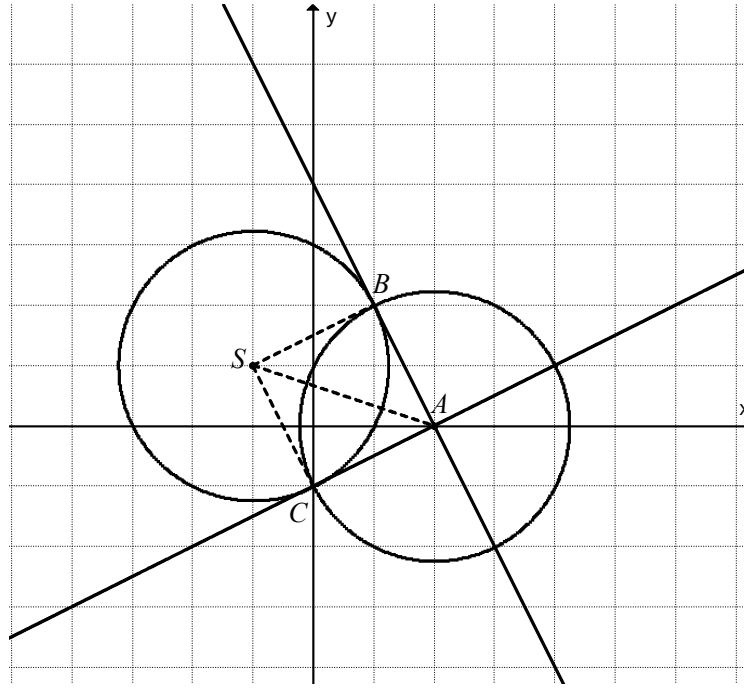
Obliczenie wartości parametru  $a$ , dla których równanie ma jedno rozwiązanie i zapisanie, że dla tych wartości  $a$ , proste styczne są prostopadłe.

### III sposób rozwiązania (punkty styczności)

Przekształcamy równanie okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$  do postaci  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ .

Wyznaczamy współrzędne środka  $S$  i promień  $r$  tego okręgu:  $S = (-1, 1)$ ,  $r = \sqrt{5}$ .

Wykonujemy rysunek, na którym zaznaczamy okrąg o środku  $S = (-1, 1)$  i promieniu  $r = \sqrt{5}$  oraz punkt  $A = (2, 0)$ .



Niech punkty  $B$  i  $C$  będą punktami styczności prostych poprowadzonych z punktu  $A = (2, 0)$  do okręgu o równaniu  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ .

Wówczas  $\angle SBA = \angle SCA = 90^\circ$  i  $|SA|$  jest przeciwprostokątną w trójkątach  $ACS$  i  $ABS$ .

Obliczamy lub odczytujemy długość odcinka  $|SA|$ :

$$|SA| = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Ponieważ  $|SB|^2 + |AB|^2 = |SA|^2$  i  $|SC|^2 + |CA|^2 = |SA|^2$ , to  $|AB| = \sqrt{5}$  i  $|AC| = \sqrt{5}$ .

Stąd  $|SB| = |AB| = |AC| = |SC|$ .

Zapisujemy równanie okręgu o środku w punkcie  $A = (2, 0)$  i promieniu  $|AB| = \sqrt{5}$ :

$$(x-2)^2 + y^2 = 5.$$

Punkty przecięcia okręgów o równaniach  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$  i  $(x-2)^2 + y^2 = 5$ , które są jednocześnie punktami styczności prostych stycznych do okręgu  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ , poprowadzonych przez punkt  $A = (2, 0)$ , to punkty  $B$  i  $C$ . Wyznaczamy ich współrzędne rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

lub odczytujemy z wykresu:  $B = (1, 2)$  i  $C = (0, -1)$ .

Przekształcamy układ równań do równania i wyznaczamy  $y$  w zależności od  $x$ :

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$-4x + 4 - 2x + 2y - 2 = 0$$

$$-6x + 2y + 2 = 0$$

$$2y = 6x - 2$$

$$y = 3x - 1.$$

Podstawiamy  $y = 3x - 1$  do równania  $(x-2)^2 + y^2 = 5$ .

Przekształcamy to równanie

$$(x-2)^2 + (3x-1)^2 = 5$$

$$10x^2 - 10x = 0$$

$$10x(x-1) = 0.$$

Stąd  $x = 0$  lub  $x = 1$ .

Zatem  $x = 0$  lub  $x = 1$ .

Zatem  $y = -1$  lub  $y = 2$ .

Punkty styczności mają współrzędne  $B = (1, 2)$  i  $C = (0, -1)$ .

Zapisujemy równania stycznych  $AB$  i  $AC$  do okręgu  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ :

$$y = -2x + 4 \text{ i } y = \frac{1}{2}x - 1 \text{ lub tylko ich współczynniki kierunkowe: } a_1 = -2, a_2 = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ  $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ , to proste  $AB$  i  $AC$  są prostopadłe.

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....1 pkt**

Zauważenie, że trójkąty  $ACS$  i  $ABS$  są prostokątne i obliczenie długości przeciwprostokątnej, np.  $|SA| = \sqrt{10}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....2 pkt**

- Zapisanie i rozwiązanie układu równań 
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases} : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

albo

- Odczytanie z wykresu współrzędnych punktów styczności:  $B = (1, 2)$ ,  $C = (0, -1)$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....3 pkt**

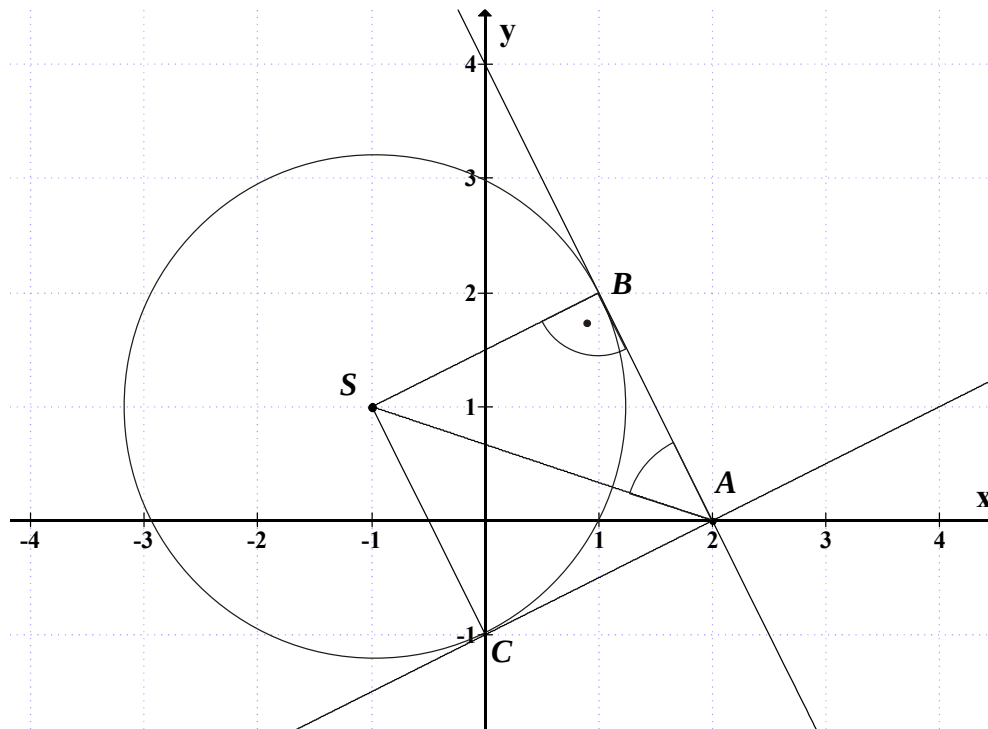
**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Wyznaczenie równań stycznych do okręgu lub tylko ich współczynników kierunkowych i zapisanie, że proste styczne są prostopadłe.

#### IV sposób rozwiązania

Wyznaczamy współrzędne środka  $S$  i promień  $r$  tego okręgu:  $S = (-1, 1)$ ,  $r = \sqrt{5}$ .

Wykonujemy rysunek, na którym zaznaczamy okrąg o środku  $S = (-1, 1)$  i promieniu  $r = \sqrt{5}$  oraz punkt  $A = (2, 0)$ .



$$|SB| = \sqrt{5}$$

$$|SA| = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\sin |\sphericalangle SAB| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Stąd  $|\sphericalangle SAB| = 45^\circ$  czyli  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ .

#### Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt

Obliczenie promienia okręgu:  $|SB| = \sqrt{5}$  i obliczenie długości odcinka  $SA$ :  $|SA| = \sqrt{10}$ .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt

Obliczenie  $\sin |\sphericalangle SAB| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  lub obliczenie  $|AB| = \sqrt{5}$  (lub  $|AC| = \sqrt{5}$ ) lub zapisanie

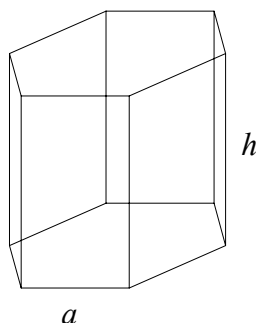
$$|SA| = |SB|\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt

Obliczenie miary kąta  $BAC$ :  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$  lub zapisanie, że kąt  $BAC$  jest prosty.

**Zadanie 8. (0–4)**

|                          |                                                                                            |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| Modelowanie matematyczne | Znalezienie związków miarowych w graniastosłupie, wyznaczenie największej wartości funkcji |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Wprowadzamy oznaczenia:  $a$  – długość krawędzi podstawy graniastosłupa,  
 $h$  – długość krawędzi bocznej graniastosłupa.

Z tego, że suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 24, mamy  $12a + 6h = 24$ .

Wyznaczamy jedną ze zmiennych:  $h = 4 - 2a$  lub  $a = 2 - \frac{h}{2}$ .

Pole  $P$  powierzchni bocznej jest równe  $P = 6ah$  dla  $a \in (0, 2)$  oraz  $h \in (0, 4)$ .

Aby wyznaczyć długość krawędzi podstawy graniastosłupa, którego pole powierzchni bocznej jest największe,

- zapisujemy funkcję  $P$  w zależności od zmiennej  $a$   
 $P(a) = 6a(4 - 2a)$ ,  $P(a) = -12a^2 + 24a$ .  
Pole  $P$  ma największą wartość, gdy  $a = 1$ .

albo

- zapisujemy funkcję  $P$  w zależności od zmiennej  $h$   
 $P(h) = 6h\left(2 - \frac{h}{2}\right)$ ,  $P(h) = -3h^2 + 12h$ .  
Pole  $P$  ma największą wartość, gdy  $h = 2$ .  
Zatem  $a = 1$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie, że  $12a + 6h = 24$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie pola  $P$  powierzchni bocznej graniastosłupa oraz wyznaczenie  $a$  lub  $h$  w zależności od jednej zmiennej, np.:

$$P = 6ah \text{ oraz } a = 2 - \frac{h}{2} \text{ lub } h = 4 - 2a.$$



**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie pola powierzchni bocznej w zależności od jednej zmiennej:

$$P(a) = 6a(4 - 2a) \quad \text{lub} \quad P(h) = 6h\left(2 - \frac{h}{2}\right).$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie długości krawędzi podstawy graniastosłupa, którego pole powierzchni bocznej jest największe:  $a = 1$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający wyznaczy tylko wartość  $h = 2$ , dla której pole powierzchni bocznej jest największe, to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 9. (0–4)**

|                              |                                                                                                                       |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Wybieramy miejsce dla dwójek. Jest  $\binom{8}{2} = 28$  takich miejsc.

Wybieramy miejsce dla trójek. Jest  $\binom{6}{3} = 20$  takich miejsc.

Na pozostałych trzech miejscach mogą wystąpić cyfry: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jest  $7^3$  ciągów trójelementowych ze zbioru siedmioelementowego.

Zatem jest  $28 \cdot 20 \cdot 7^3 = 4^2 \cdot 5 \cdot 7^4 = 192080$  liczb spełniających warunki zadania.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania ..... 1 pkt**

Obliczenie liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki albo obliczenie liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki, albo obliczenie na ile sposobów można zapisać trzy pozostałe miejsca.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie obu wielkości: liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki i liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

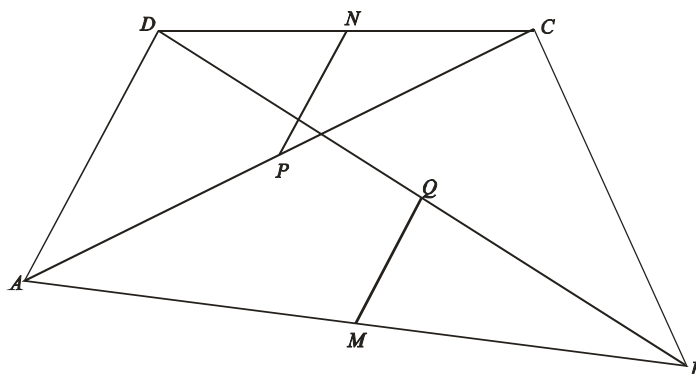
Obliczenie liczby ciągów na pozostałych miejscach, skorzystanie z reguły mnożenia i obliczenie, że jest 192080 szukanych liczb.

**Uwagi**

1. Zdający może obliczać liczby miejsc dla dwójek i trójek w sposób następujący:  
 $\binom{8}{5}\binom{5}{3}$  albo  $\binom{8}{5}\binom{5}{2}$ , albo najpierw miejsca dla cyfr różnych od 2 i od 3 i potem miejsca dla dwójek (lub trójek):  $\binom{8}{3}\binom{5}{2} \left( \binom{8}{3}\binom{5}{3} \right)$ .
2. Jeżeli zdający rozwiąże zadanie przy założeniu, że pozostałe trzy liczby „są różne”, otrzymując  $\binom{8}{2}\binom{6}{3} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ , to otrzymuje **3 punkty**.
3. Za rozwiązanie  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7^3$  zdający otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie: *ile jest liczb ośmiocyfrowych w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują co najmniej dwie dwójki i występują co najmniej trzy trójki*, to otrzymuje **4 punkty** (poprawny wynik: 247240).
5. Odpowiedź  $\binom{8}{2}\binom{6}{3} \cdot 9^3$  jest błędna (błąd merytoryczny). W takim przypadku zdający otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 10. (0–3)**

|                            |                                                    |
|----------------------------|----------------------------------------------------|
| Rozumowanie i argumentacja | Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich |
|----------------------------|----------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Ponieważ punkty  $N$  i  $P$  są środkami boków  $DC$  i  $AC$  trójkąta  $ADC$ , więc  $NP \parallel AD$ .

Punkty  $M$  i  $Q$  są środkami boków  $AB$  i  $DB$  trójkąta  $ABD$ , więc  $MQ \parallel AD$ .

Zatem  $NP \parallel MQ$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zapisanie, że:  $NP \parallel AD$  lub  $MQ \parallel AD$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zapisanie i uzasadnienie, że  $NP \parallel AD$  oraz  $MQ \parallel AD$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

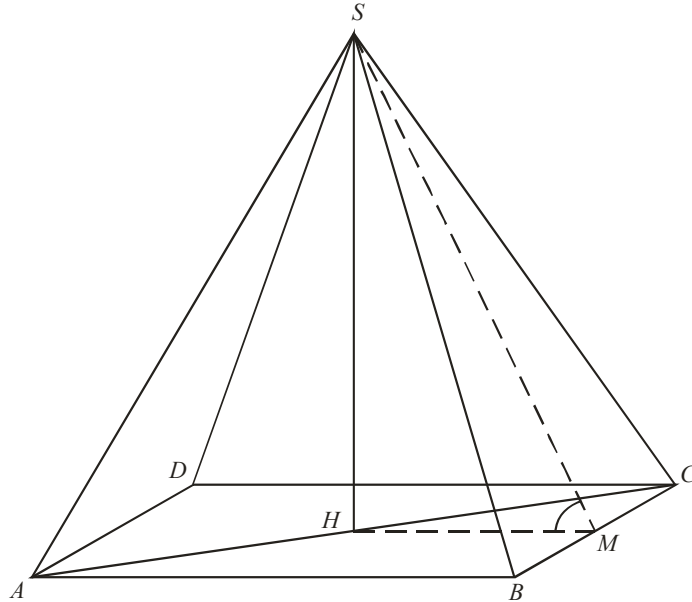
Zapisanie wniosku, że  $NP \parallel MQ$ .

**Zadanie 11. (0–6)**

Użycie i tworzenie strategii

Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie

**I sposób rozwiązania**



Wprowadzamy oznaczenia:  $\alpha = |\sphericalangle HMS|$ ,  $|AC| = 6x$ ,  $|AS| = 5x$ . Ponieważ  $|AH| = \frac{1}{2}|AC|$  stąd  $|AH| = 3x$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $CHS$  otrzymujemy:

$$|SH| = \sqrt{|CS|^2 - |HC|^2} = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x.$$

Ponieważ  $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}}$ , stąd  $|BC| = \frac{6x}{\sqrt{2}}$ .

$$\text{Zatem } |CM| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{6x}{\sqrt{2}} = \frac{3x}{\sqrt{2}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $MCS$  otrzymujemy  $|SM|^2 = |CS|^2 - |CM|^2$ .

$$\text{Stąd } |SM| = \sqrt{25x^2 - \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{50-9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{41}{2}x^2}, \quad |SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x.$$

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \frac{|SH|}{|SM|} = \frac{4x}{\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{82}}{41}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wyznaczenie  $|AH| = 3x$  i  $|SH| = 4x$  przy przyjętych oznaczeniach, np.:  $\alpha = |\angle HMS|$ ,  $|AC| = 6x$ ,  $|AS| = |CS| = 5x$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 3 pkt**

Wyznaczenie długości  $BC$ :  $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}} = \frac{6x}{\sqrt{2}}$  lub  $|BC| = 3x\sqrt{2}$  i wyznaczenie długości  $CM$ :

$$|CM| = \frac{3x\sqrt{2}}{2} \text{ lub } |CM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 pkt**

Wyznaczenie długości  $SM$ :  $|SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$  lub  $|SM| = \frac{\sqrt{82}}{2} \cdot x$ .

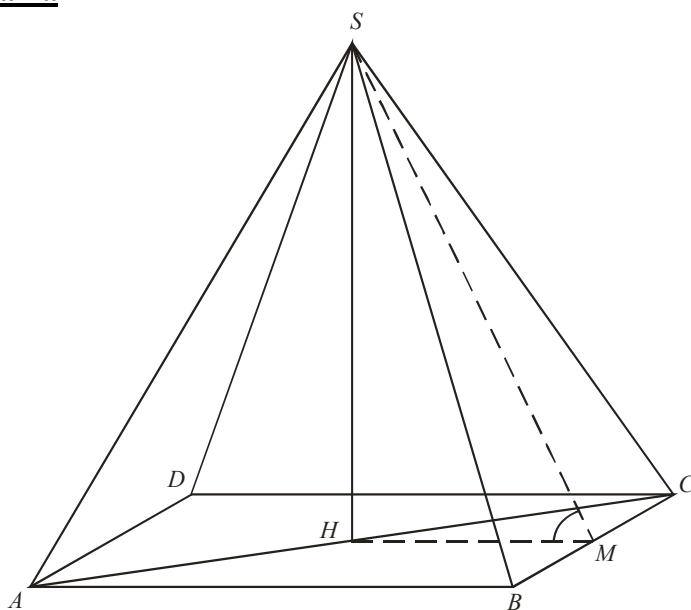
**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 5 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..... 6 pkt**

Wyznaczenie sinusa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy:  $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}$ .

**Uwagi**

1. Jeśli zdający wyznaczy jedną z wielkości  $|BC|$  lub  $|BM|$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, to za rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy  $\tan \alpha$  lub  $\cos \alpha$ , a nie obliczy  $\sin \alpha$  lub obliczy go z błędem, to otrzymuje **5 punktów**.

**II sposób rozwiązania**

Wprowadzamy oznaczenia:  $\alpha = |\angle HMS|$ ,  $a = |AB| = |BC| = |CD| = |AD|$ , stąd  $|AC| = a\sqrt{2}$

$$\text{ i } |AH| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

Zapisujemy równość wynikającą z treści zadania:

$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{6}{5} \text{ czyli } \frac{a\sqrt{2}}{|AS|} = \frac{6}{5}, \text{ stąd } |AS| = \frac{5a\sqrt{2}}{6}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego  $ASH$  otrzymujemy:

$$|SH| = \sqrt{|AS|^2 - |AH|^2}, \text{ stąd } |SH| = \sqrt{\left(\frac{5a\sqrt{2}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25a^2 \cdot 2}{36} - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{16a^2}{18}} = \frac{4a}{3\sqrt{2}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego  $SHM$  otrzymujemy:

$$|SM| = \sqrt{|SH|^2 + |HM|^2} \text{ (gdzie } |HM| = \frac{1}{2}a \text{)}.$$

$$\text{Stąd } |SM| = \sqrt{\left(\frac{4a}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{18} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{32a^2 + 9a^2}{36}} = \sqrt{\frac{41a^2}{36}} = \frac{\sqrt{41}}{6} \cdot a.$$

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \frac{|SH|}{|SM|} = \frac{\frac{4a}{3\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{41}a}{6}} = \frac{4a}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{41}a} = \frac{4\sqrt{82}}{41}.$$

#### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń:  $\alpha = \angle HMS$ ,  $|AC| = a\sqrt{2}$ , gdzie  $a = |AB| = |BC| = |CD| = |AD|$

$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{6}{5} \text{ oraz wyznaczenie } |AS| = \frac{5a\sqrt{2}}{6}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 3 pkt

Zapisanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego  $CSH$ :

$$|SH| = \sqrt{\left(\frac{5a\sqrt{2}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \text{ i wyznaczenie: } |SH| = \frac{4a}{3\sqrt{2}} \text{ lub } |SH| = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 pkt

Zapisanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego  $SHM$ :

$$|SM| = \sqrt{\left(\frac{4a}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ lub } |SM| = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ i wyznaczenie } |SM|: |SM| = \frac{\sqrt{41}a}{6}.$$

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

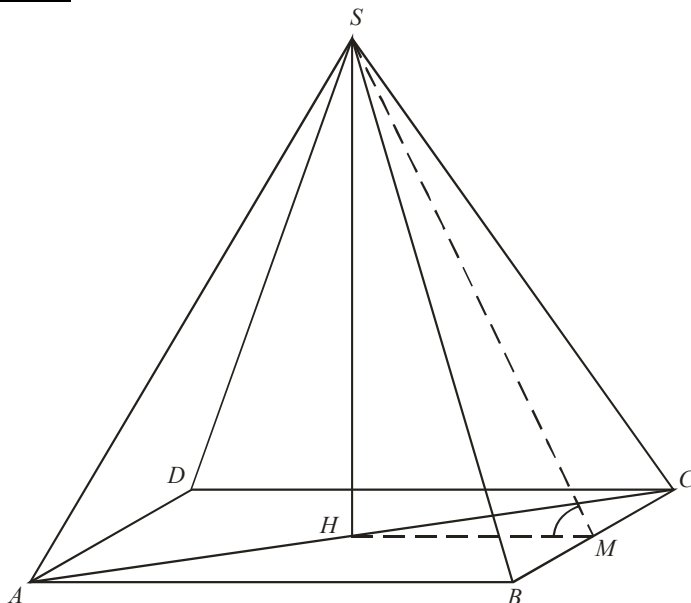
**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 5 pkt

**Rozwiązanie pełne** ..... 6 pkt

Wyznaczenie sinusa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy:  $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}.$

#### **Uwagi**

1. Jeśli zdający wyznaczy jedną z wielkości  $|BC|$  lub  $|BM|$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, to za rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy  $\operatorname{tg} \alpha$  lub  $\cos \alpha$ , a nie obliczy  $\sin \alpha$  lub obliczy go z błędem, to otrzymuje **5 punktów**.

**III sposób rozwiązania**

Wprowadzamy oznaczenia:  $\alpha = |\sphericalangle HMS|$ ,  $|AC| = 6x$ ,  $|HC| = 3x$ ,  $|SC| = 5x$ . Ponieważ  $|AH| = \frac{1}{2}|AC|$  stąd  $|AH| = 3x$ .

Wtedy  $|BC|\sqrt{2} = 6x$ , stąd  $|BC| = \frac{6x}{\sqrt{2}}$ .

Zatem  $|BM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}$ ,  $|HM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BMS$  otrzymujemy  $|SM|^2 = |BS|^2 - |BM|^2$ .

Stąd  $|SM| = \sqrt{25x^2 - \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{41}{2}x^2} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}}x$ .

Zatem  $\cos \alpha = \frac{|HM|}{|SM|} = \frac{3x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{41} \cdot x} = \frac{3}{\sqrt{41}}$ .

Stąd  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{41}} = \sqrt{\frac{32}{41}} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}}{41} = \frac{4\sqrt{82}}{41}$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń:  $\alpha = |\sphericalangle HMS|$ ,  $|AC| = 6x$ ,  $|HC| = 3x$ ,  $|SC| = 5x$ ,  $|AH| = 3x$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 3 pkt**

Wyznaczenie długości  $BC$ :  $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}} = \frac{6x}{\sqrt{2}}$  lub  $|BC| = 3x\sqrt{2}$  i wyznaczenie długości

$$|BM| = |HM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 pkt**

Wyznaczenie długości  $SM$ :  $|SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$  lub  $|SM| = \frac{\sqrt{82}}{2} \cdot x$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 5 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..... 6 pkt**

Obliczenie  $\cos \alpha$ , a następnie  $\sin \alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{41}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający obliczy jedynie  $\cos \alpha$ , to otrzymuje **5 punktów**.

**Zadanie 12. (0–3)**

|                              |                                                                                     |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycia i tworzenia strategii | Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania.**

Wiemy, że  $A \cup B = (A \cap B') \cup B$  i  $(A \cap B') \cap B = \emptyset$  oraz  $P(A \cup B) \leq 1$ .

Mamy więc:  $1 \geq P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B)$ , stąd  $P(A \cap B') \leq 0,3$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie, że  $A \cup B = (A \cap B') \cup B$ . Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zapisanie, że  $(A \cap B') \cap B = \emptyset$  oraz, że  $P(A \cup B) \leq 1$ . Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zapisanie wniosku:  $P(A \cap B') \leq 0,3$ .

**II sposób rozwiązania.**

Wiemy, że  $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . Stąd  $P(A \cap B) \geq 0,6$ .

Mamy więc:  $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \leq 0,9 - 0,6 = 0,3$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Zapisanie, że  $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ . Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Uzasadnienie, że  $P(A \cap B) \geq 0,6$ , np. zapisze  $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , stąd  $P(A \cap B) \geq 0,6$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Wykazanie, że:  $P(A \cap B') \leq 0,3$ .

**III sposób rozwiązania.**

Z faktu, że  $A \cap B' \subset B'$  wynika, że  $P(A \cap B') \leq P(B')$ .

Ponieważ  $P(B) = 0,7$ , więc  $P(B') = 0,3$ . Stąd wynika, że  $P(A \cap B') \leq P(B') = 0,3$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Obliczenie  $P(B')$ :  $P(B') = 0,3$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zapisanie lub wykorzystanie faktu, że  $A \cap B' \subset B'$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Zapisanie wniosku:  $P(A \cap B') \leq 0,3$ .