

Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

dysleksja



MMA-R1A1P-062

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz II

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 150 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 12 – 21). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊙ i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

ARKUSZ II

**MAJ
ROK 2006**

Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Wypełnia zdający przed
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

--	--	--

**KOD
ZDAJĄCEGO**

Zadanie 12. (5 pkt)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwy jest wzór: $1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \dots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$.

Sprawdzam, czy wzór jest prawdziwy dla $n = 1$:

$$L = 1 \cdot 3 \cdot 1! \quad P = (2!)^2 - 1$$

$$L = P$$

Założenie indukcyjne:

$$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \dots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Teza:

$$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \dots + n(n+2)(n!)^2 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 = [(n+2)!]^2 - 1$$

Dowód:

Korzystam z założenia indukcyjnego i otrzymuję

$$\begin{aligned} L &= [(n+1)!]^2 - 1 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 = \\ &= [(n+1)!]^2 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 - 1. \end{aligned}$$

Wylączę z pierwszych dwóch składników wyrażenia wspólny czynnik

$$[(n+1)!]^2 \text{ przed nawias:}$$

$$\begin{aligned} L &= [(n+1)!]^2 \cdot [1 + (n+1)(n+3)] - 1 = [(n+1)!]^2 \cdot (n^2 + 4n + 4) - 1 = \\ &= [(n+1)!]^2 \cdot (n+2)^2 - 1. \end{aligned}$$

Korzystam z równości: $(n+1)!(n+2) = (n+2)!$ i otrzymuję

$$L = [(n+1)!(n+2)]^2 - 1 = [(n+2)!]^2 - 1 = P.$$

wniosek: Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	12.1.	12.2.	12.3.	12.4.	12.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

Zadanie 13. (5 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) , gdzie $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
- Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \leq a_n \leq b$.

a)

Aby określić monotoniczność ciągu obliczam różnicę $a_{n+1} - a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5n+11}{10(n+2)} - \frac{5n+6}{10(n+1)} = \\ &= \frac{(5n+11)(n+1) - (5n+6)(n+2)}{10(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{5n^2 + 5n + 11n + 11 - 5n^2 - 10n - 6n - 12}{10(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{-1}{10(n+1)(n+2)} \\ \frac{-1}{10(n+1)(n+2)} &< 0 \text{ dla każdej liczby naturalnej, zatem ciąg jest malejący.} \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{10(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{10n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{6}{n}}{10 + \frac{10}{n}} = \frac{1}{2}$$

c)

Ciąg jest malejący, więc najmniejszą liczbą, która spełnia nierówność $a_n \leq b$

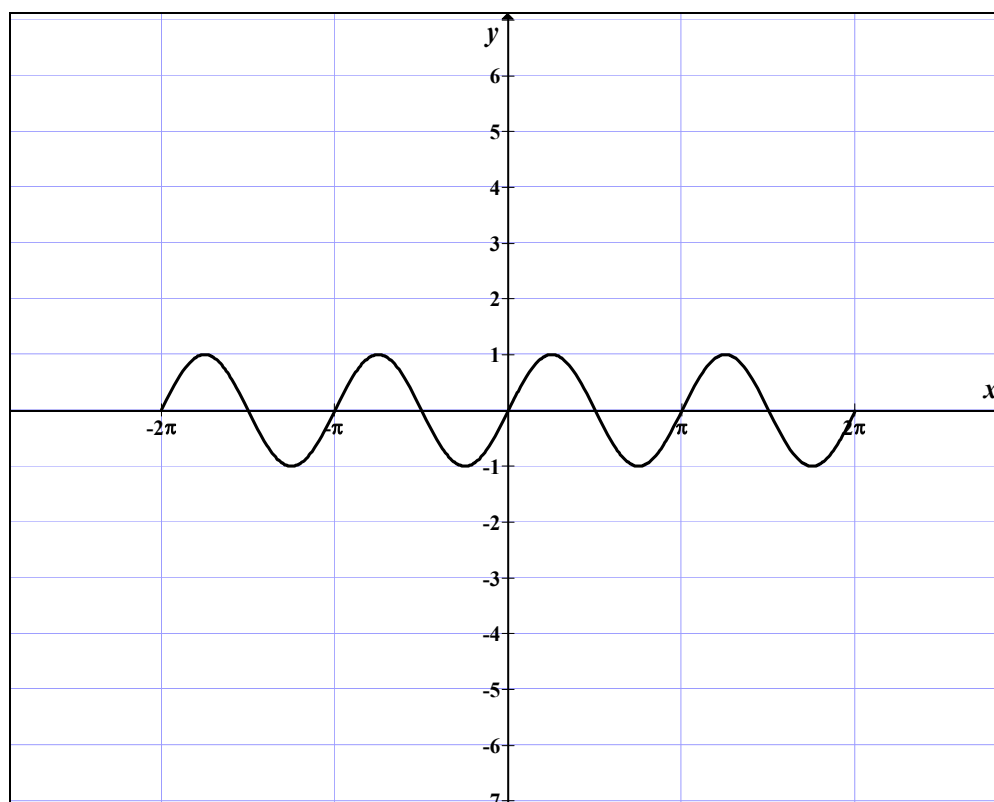
jest pierwszy wyraz tego ciągu, czyli $b = \frac{11}{20}$, natomiast największą liczbą

spełniającą nierówność $a \leq a_n$ jest granica tego ciągu, czyli $a = \frac{1}{2}$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	13.1.	13.2.	13.3.	13.4.	13.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

Zadanie 14. (4 pkt)a) Naskicuj wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.b) Naskicuj wykres funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

a)



b)

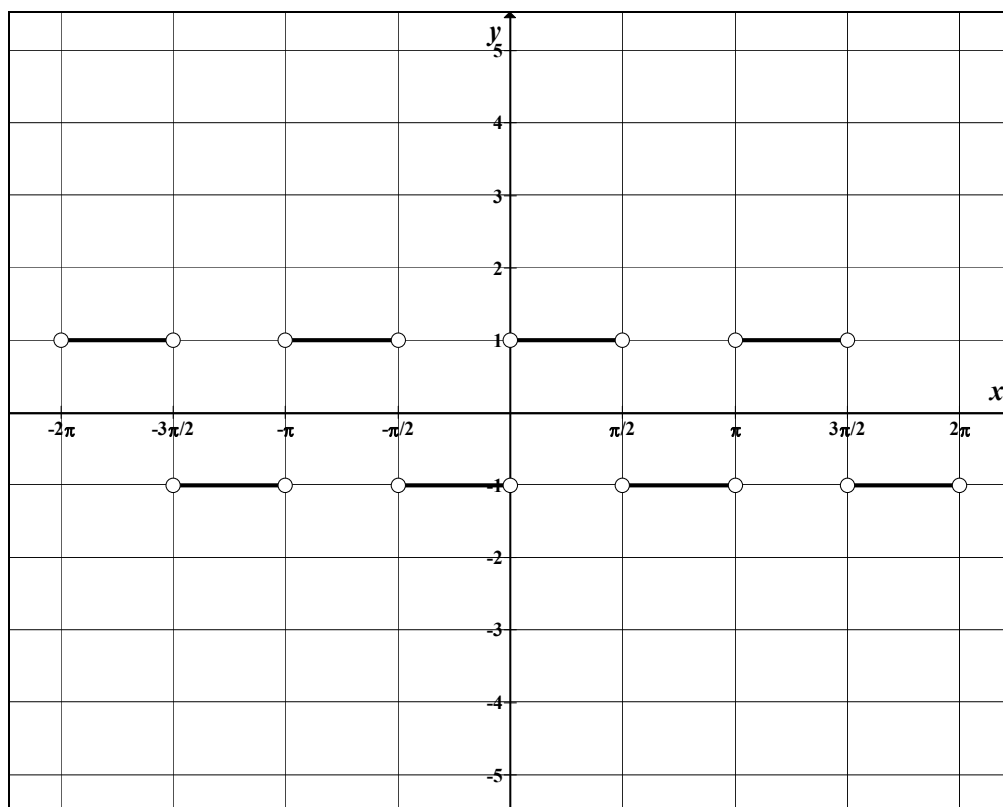
Wyznaczam dziedzinę funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$:

$$\sin 2x \neq 0 \text{ dla } x \neq \frac{k\pi}{2}.$$

Przekształcam wzór funkcji:

$$y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \sin 2x > 0 \\ -1 & \text{dla } \sin 2x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ -1 & \text{dla } x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \end{cases}$$



Odp.: Rozwiązaniem nierówności $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$

jest zbiór: $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	14.1.	14.2.	14.3.	14.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 15. (4 pkt)

Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

Wprowadzam następujące oznaczenia zdarzeń:

A - autobus prowadzi kierowca A,

B - autobus prowadzi kierowca B,

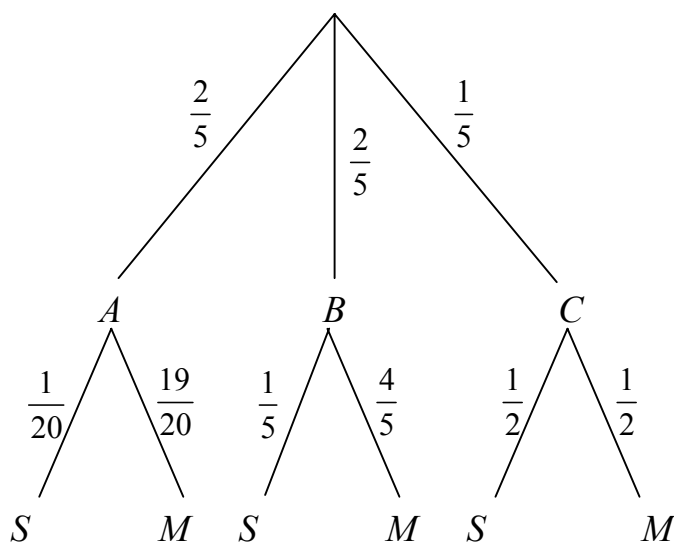
C - autobus prowadzi kierowca C,

S - autobus szkolny spóźnia się,

M - autobus przyjeżdża punktualnie.

Zdarzenia A, B, C spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, więc:

$$P(S) = P(S|A) \cdot P(A) + P(S|B) \cdot P(B) + P(S|C) \cdot P(C).$$



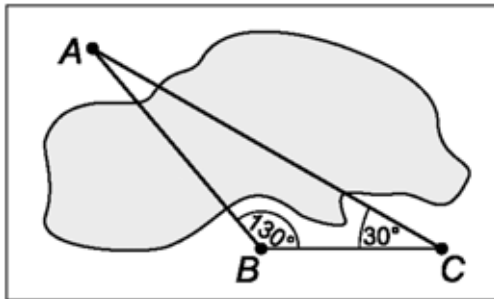
Obliczam prawdopodobieństwo:

$$P(S) = \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	15.1.	15.2.	15.3.	15.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 16. (3 pkt)

Obiekty A i B leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami B i C jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami A i B i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



$|\sphericalangle CAB| = 20^\circ$, ponieważ suma kątów w trójkącie jest równa 180° .

Do wyznaczenia szukanej odległości stosuję twierdzenie sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin 30^\circ} = \frac{400}{\sin 20^\circ}.$$

Obliczam odległość obiektu A od obiektu B :

$$|AB| = \frac{400}{\sin 20^\circ} \approx \frac{400}{0,342} \approx 584,8$$

Odp.: Odległość obiektów w linii prostej jest równa 585 metrów.

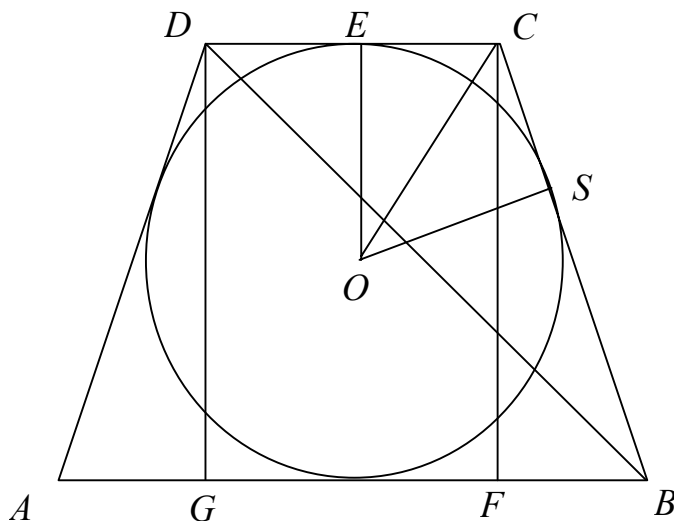
Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	16.1.	16.2.	16.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 17. (6 pkt)

Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$.

a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.

b) Oblicz cosinus $\sphericalangle CBD$.



Przyjmuję oznaczenia jak na rysunku.

a) Wykorzystując proporcję $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$ wprowadzam oznaczenia:

$$|CS| = 2x, |SB| = 5x, \text{ stąd } |BC| = 2x + 5x = 7x.$$

$$\triangle OSC \equiv \triangle OEC \text{ więc } |EC| = |CS| = 2x.$$

$$|DC| = 4x \text{ - z własności trapezu równoramiennego.}$$

Korzystając z własności czworokąta opisanego na okręgu otrzymuję:

$$|AB| + |CD| = 2 \cdot |BC| = 14x, \text{ stąd } |AB| = 10x.$$

Z własności trapezu równoramiennego wynika, że $|FB| = 3x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle FBC$ otrzymuję:

$$|CF|^2 + |FB|^2 = |CB|^2, \text{ czyli } (2r)^2 + (3x)^2 = (7x)^2, r^2 = 10x^2, \text{ stąd } x = \frac{\sqrt{10}}{10}r,$$

$$\text{więc } |BC| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r, |DC| = \frac{4\sqrt{10}}{10}r.$$

b)

Wyznaczam długość przekątnej BD z trójkąta prostokątnego BDG , w którym

$$|GB| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r :$$

$$|GB|^2 + |GD|^2 = |DB|^2,$$

$$|DB|^2 = \frac{490r^2}{100} + 4r^2 = \frac{490r^2 + 400r^2}{100}, \text{ stąd } |BD| = \frac{\sqrt{890}}{10}r.$$

Stosując twierdzenie cosinusów w trójkącie BCD otrzymuję:

$$|DC|^2 = |BC|^2 + |DB|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |DB| \cdot \cos|\sphericalangle CBD|,$$

$$\left(\frac{4\sqrt{10}}{10}r\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{10}}{10}r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{890}}{10}r\right)^2 - 2 \cdot \frac{7\sqrt{10}}{10}r \cdot \frac{\sqrt{890}}{10}r \cdot \cos|\sphericalangle CBD|.$$

$$\text{Odp.: } \cos|\sphericalangle CBD| = \frac{61\sqrt{89}}{623}.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	17.1.	17.2.	17.3.	17.4.	17.5.	17.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt						

Zadanie 18. (7 pkt)

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 m^3 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastoslupa.

Wprowadzam następujące oznaczenia:

a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość graniastoslupa.

Dla tak wprowadzonych oznaczeń wzory na objętość i pole powierzchni całkowitej graniastoslupa są następujące:

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h, \quad P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3ah.$$

Z równania $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h = 2$ wyznaczam niewiadomą h : $h = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$.

Po podstawieniu h do wzoru na pole powierzchni całkowitej graniastoslupa otrzymuję funkcję:

$$P(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3a^2} = \frac{a^3 \sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a^2 + \frac{16}{a} \right), \quad a \in (0, \infty).$$

Obliczam pochodną funkcji: $P'(a) = \sqrt{3} \cdot \frac{a^3 - 8}{a^2}$, $a \in (0, \infty)$.

Dla $a = 2$ pochodna funkcji przyjmuje wartość 0.

$P'(a) \leq 0$ dla $a \in (0, 2)$ i $P'(a) \geq 0$ dla $a \in (2, \infty)$, więc w punkcie $a = 2$

funkcja P osiąga minimum i jednocześnie wartość najmniejszą, bo funkcja P w przedziale $(0, 2)$ jest malejąca i w przedziale $(2, \infty)$ jest rosnąca.

Dla $a = 2$ wysokość $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Odp.: Wymiary graniastoslupa o objętości 2 m^3 , dla którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze są następujące: $a = 2 \text{ m}$, $h = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	18.1.	18.2.	18.3.	18.4.	18.5.	18.6.	18.7.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt							

Zadanie 19. (7 pkt)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k-2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) .

Wyrażenie: $\log_2(k-2)$ jest określone, gdy $k-2 > 0 \Leftrightarrow k > 2$.

Z definicji ciągu geometrycznego wynika, że iloraz $q = \log_2(k-2)$.

$q \neq 0 \Leftrightarrow \log_2(k-2) \neq 0$ czyli $k \neq 3$.

Aby istniała suma wszystkich wyrazów danego ciągu geometrycznego, iloraz ciągu musi spełniać warunek $|q| < 1 \Leftrightarrow |\log_2(k-2)| < 1$.

Rozwiązuję nierówność: $|\log_2(k-2)| < 1$,

$$\log_2(k-2) > -1 \quad i \quad \log_2(k-2) < 1$$

$$\log_2(k-2) > \log_2 \frac{1}{2} \quad i \quad \log_2(k-2) < \log_2 2$$

$$k-2 > \frac{1}{2} \quad i \quad k-2 < 2$$

$$k > \frac{5}{2} \quad i \quad k < 4$$

Rozwiązaniem nierówności są liczby rzeczywiste należące do przedziału $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$.

Odp.: Suma wszystkich wyrazów danego ciągu o wszystkich wyrazach różnych od zera istnieje dla $k \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup (3, 4)$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	19.1.	19.2.	19.3.	19.4.	19.5.	19.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	2	1
	Uzyskana liczba pkt						

Zadanie 20. (4 pkt)

Dane są funkcje $f(x) = 3^{x^2-5x}$ i $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$.

Oblicz, dla których argumentów x wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g .

Warunki zadania są równoważne nierówności: $3^{x^2-5x} > 3^{4x^2+6x-4}$.

Rozwiązuję nierówność: $3^{x^2-5x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$

$$3^{x^2-5x} > (3^{-2})^{-2x^2-3x+2}$$

$$3^{x^2-5x} > 3^{4x^2+6x-4}$$

Korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej otrzymuję nierówność równoważną:

$$x^2 - 5x > 4x^2 + 6x - 4$$

$$-3x^2 - 11x + 4 > 0$$

$$\Delta = 169, \quad x_1 = \frac{11-13}{-6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{11+13}{-6} = -4.$$

Odp.: Rozwiązaniem nierówności jest przedział: $\left(-4, \frac{1}{3}\right)$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	20.1.	20.2.	20.3.	20.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 21. (5 pkt)

W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja f ma następujące własności:

- jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- f jest funkcją nieparzystą,
- f jest funkcją ciągłą

oraz:

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-8, -3),$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-3, -1),$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-1, 0),$$

$$f'(-3) = f'(-1) = 0,$$

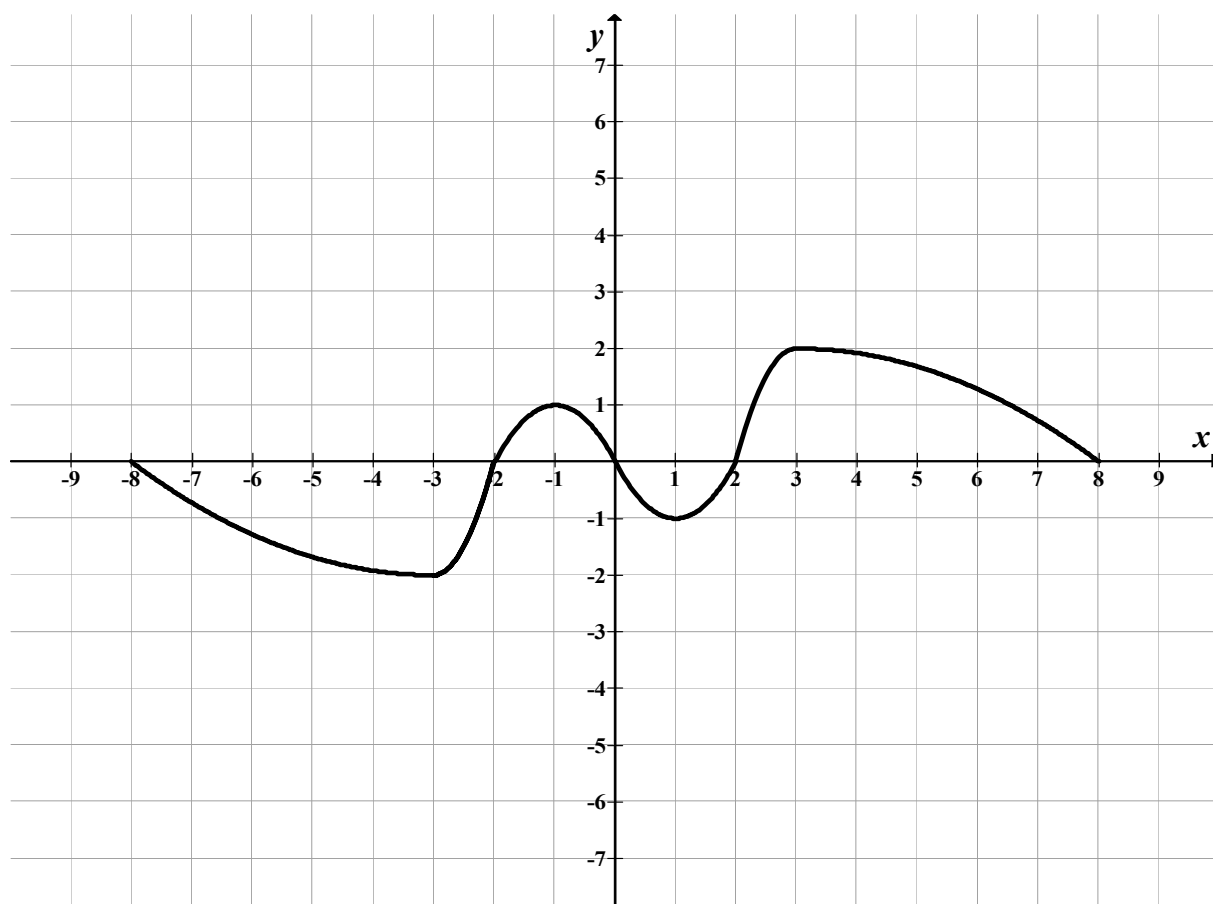
$$f(-8) = 0,$$

$$f(-3) = -2,$$

$$f(-2) = 0,$$

$$f(-1) = 1.$$

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8 \rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	21.1.	21.2.	21.3.
	Maks. liczba pkt	1	2	2
	Uzyskana liczba pkt			

BRUDNOPIS