

Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

dysleksja

☐

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

LISTOPAD
ROK 2006

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
8. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊗ i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Wypełnia zdający przed
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

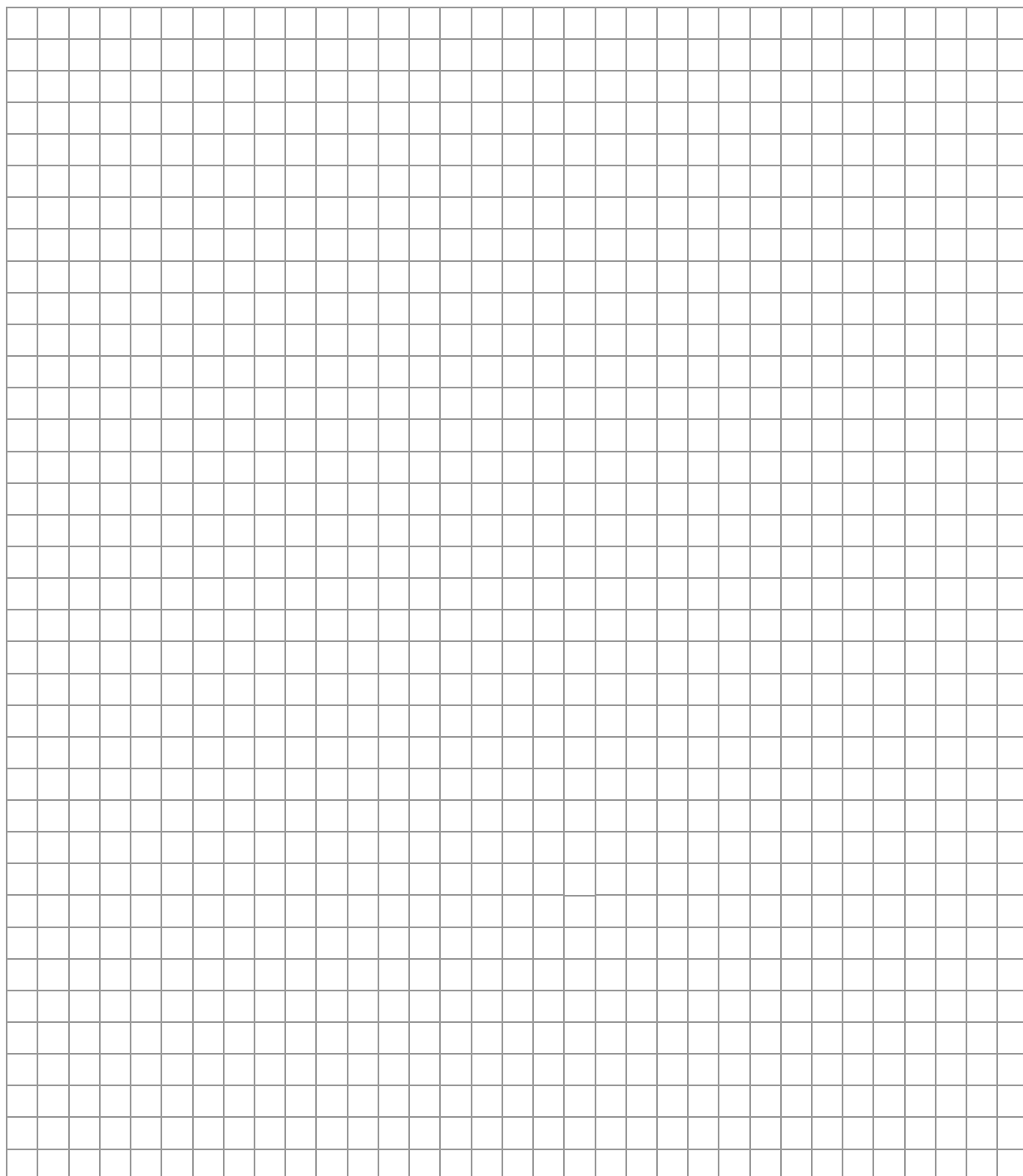
--	--	--

KOD
ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. (5 pkt)

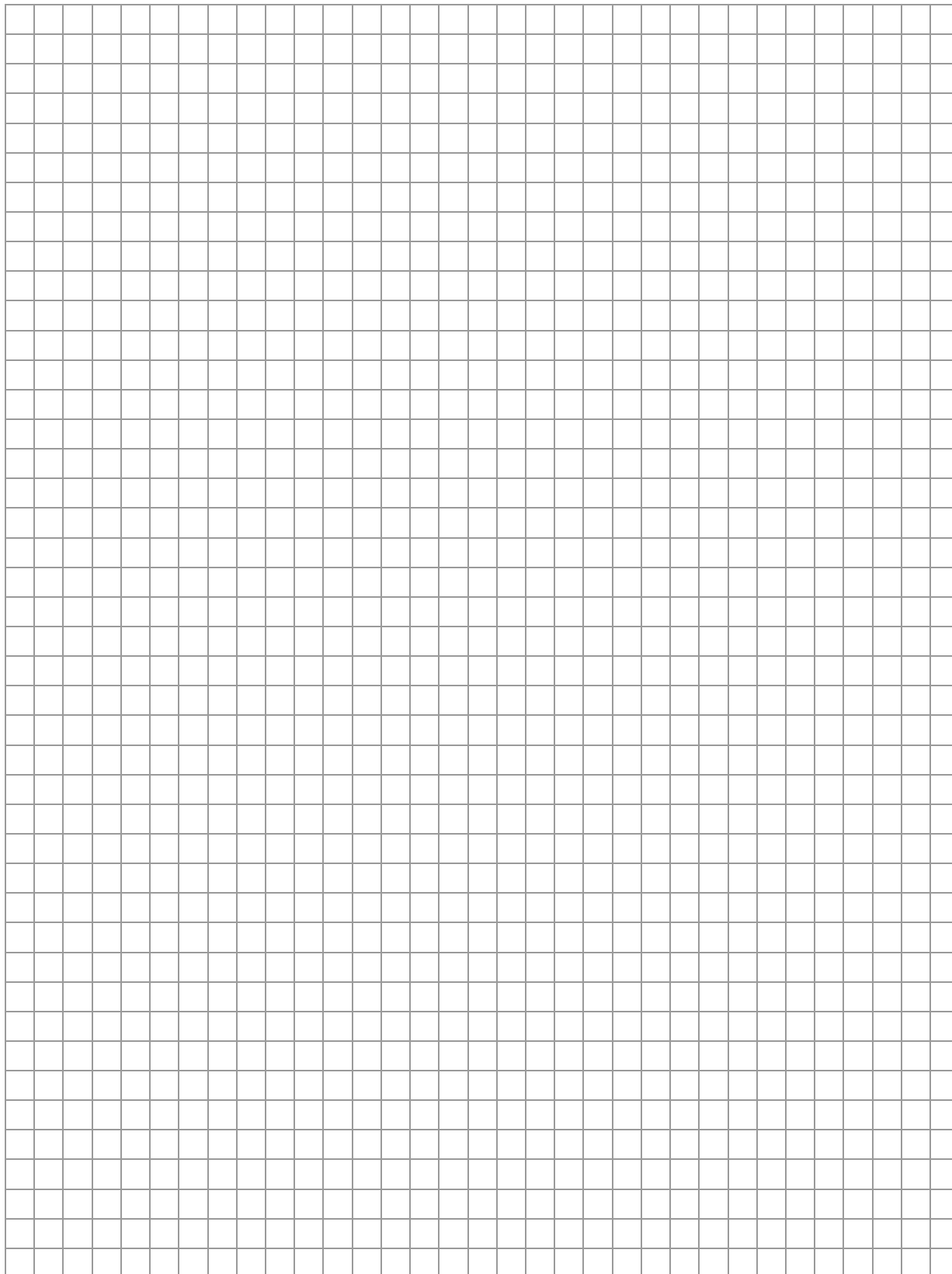
Funkcja homograficzna f jest określona wzorem $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem i $|p| \neq \sqrt{3}$.

- a) Dla $p=1$ zapisz wzór funkcji w postaci $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$, gdzie k oraz m są liczbami rzeczywistymi.
- b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których w przedziale $(p, +\infty)$ funkcja f jest malejąca.



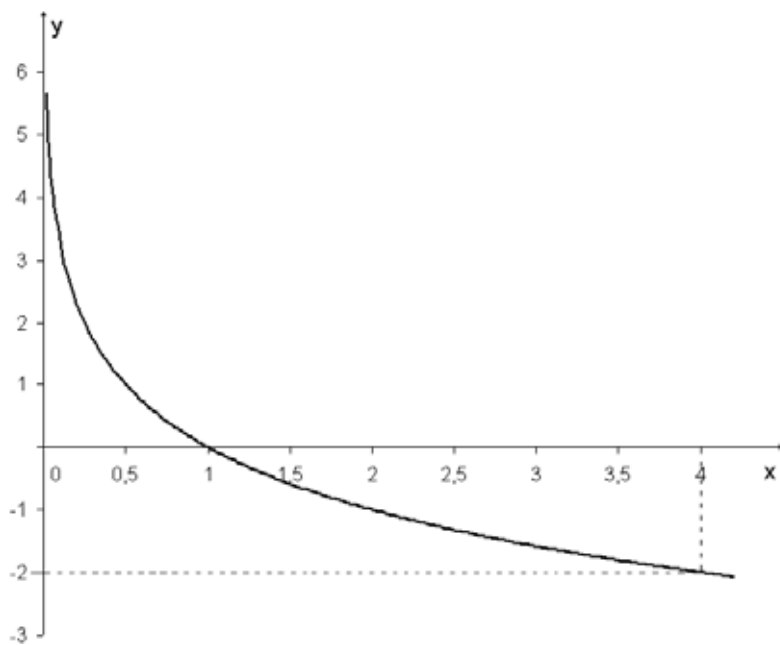
Zadanie 2. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości $k \in R$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$ są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

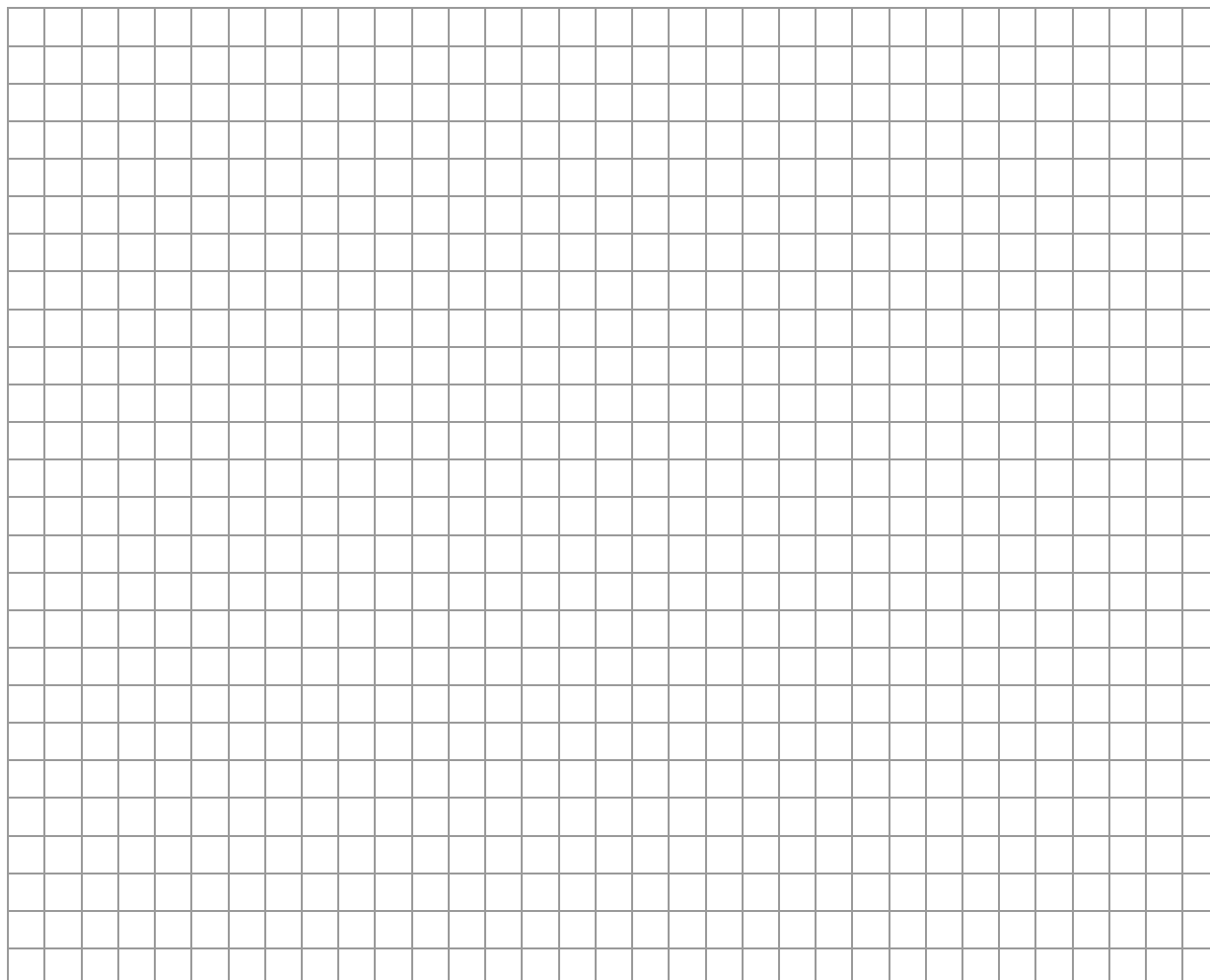


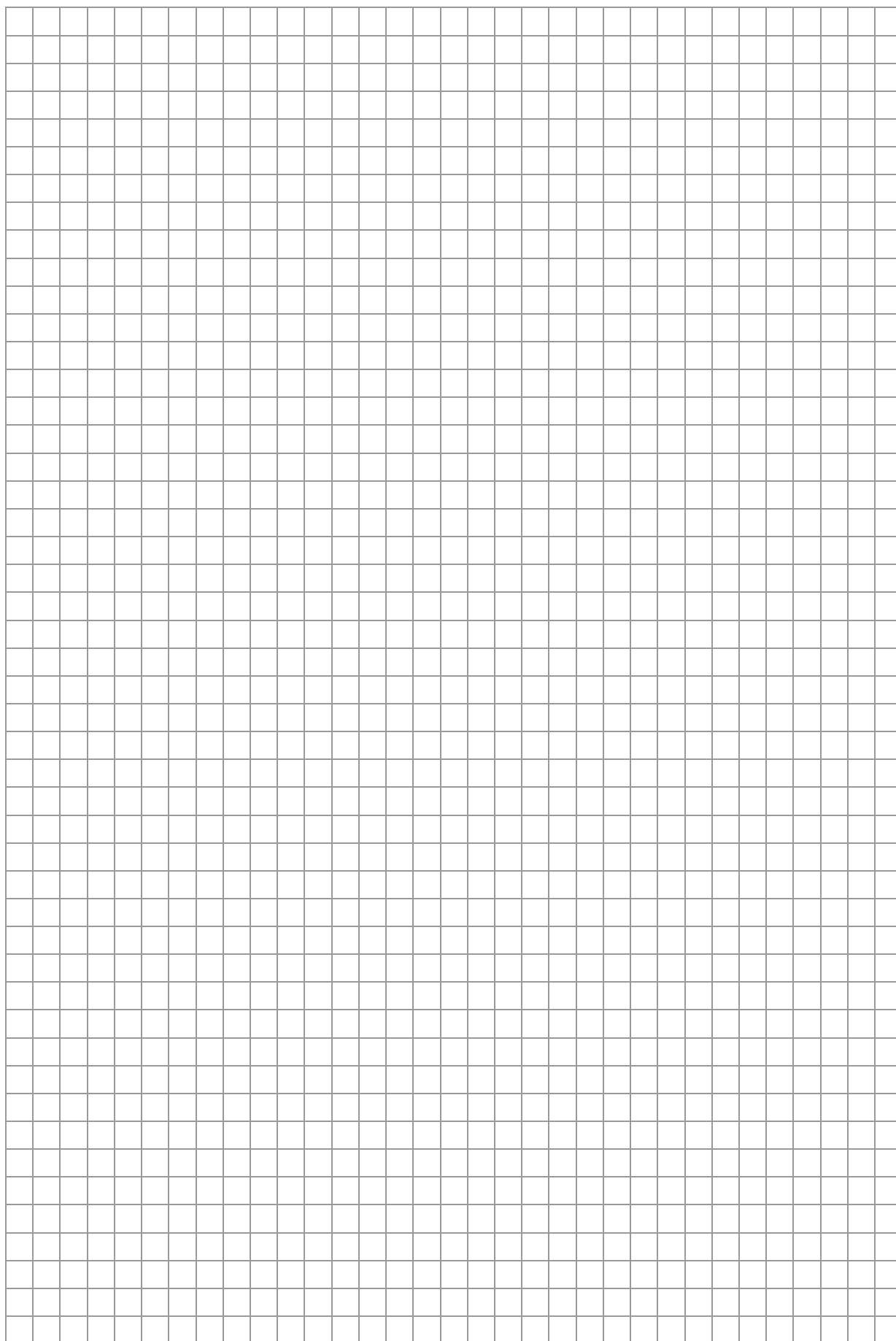
Zadanie 3. (4 pkt)

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej f .



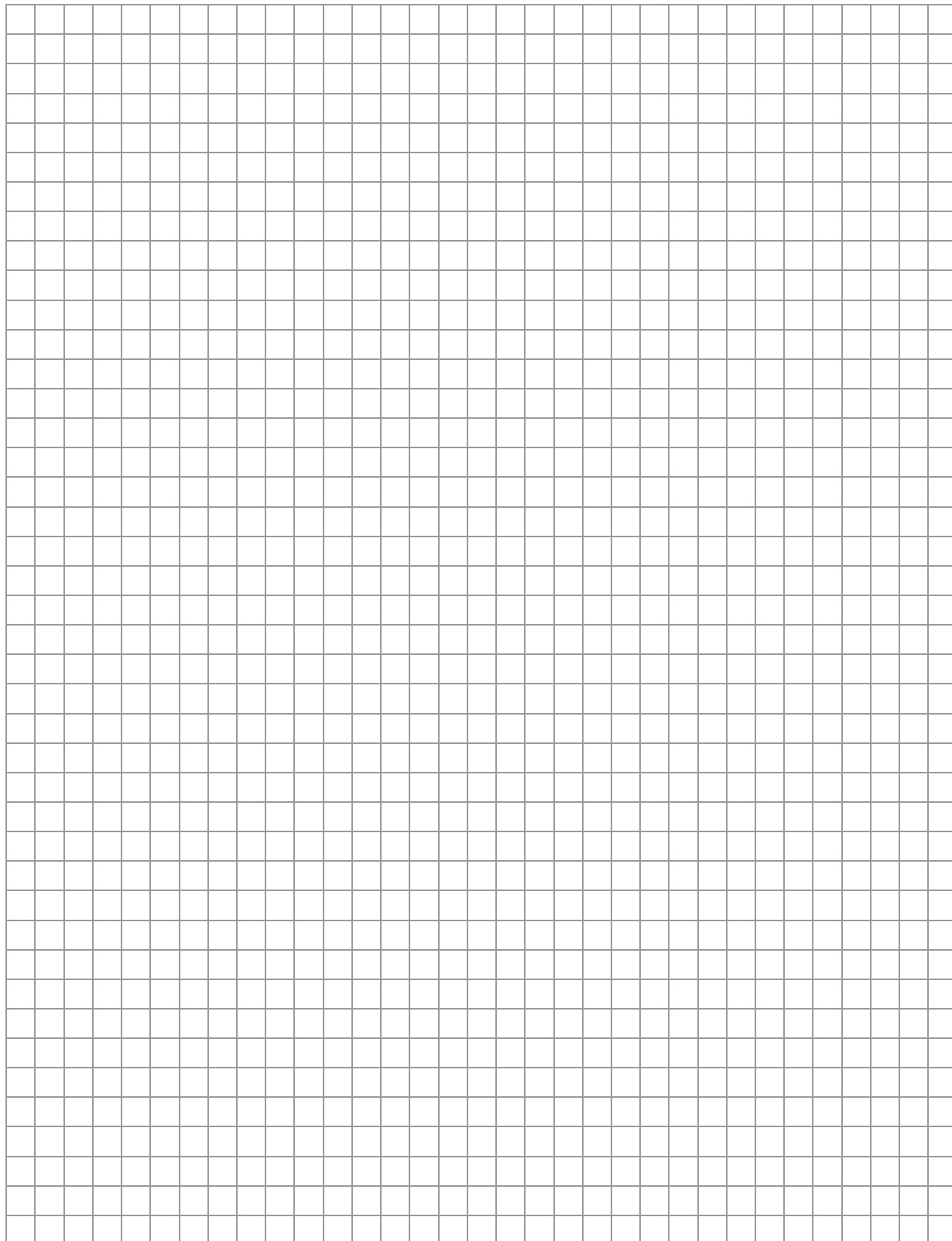
Rozwiąż równanie $(f(x))^2 - 16 = 0$.





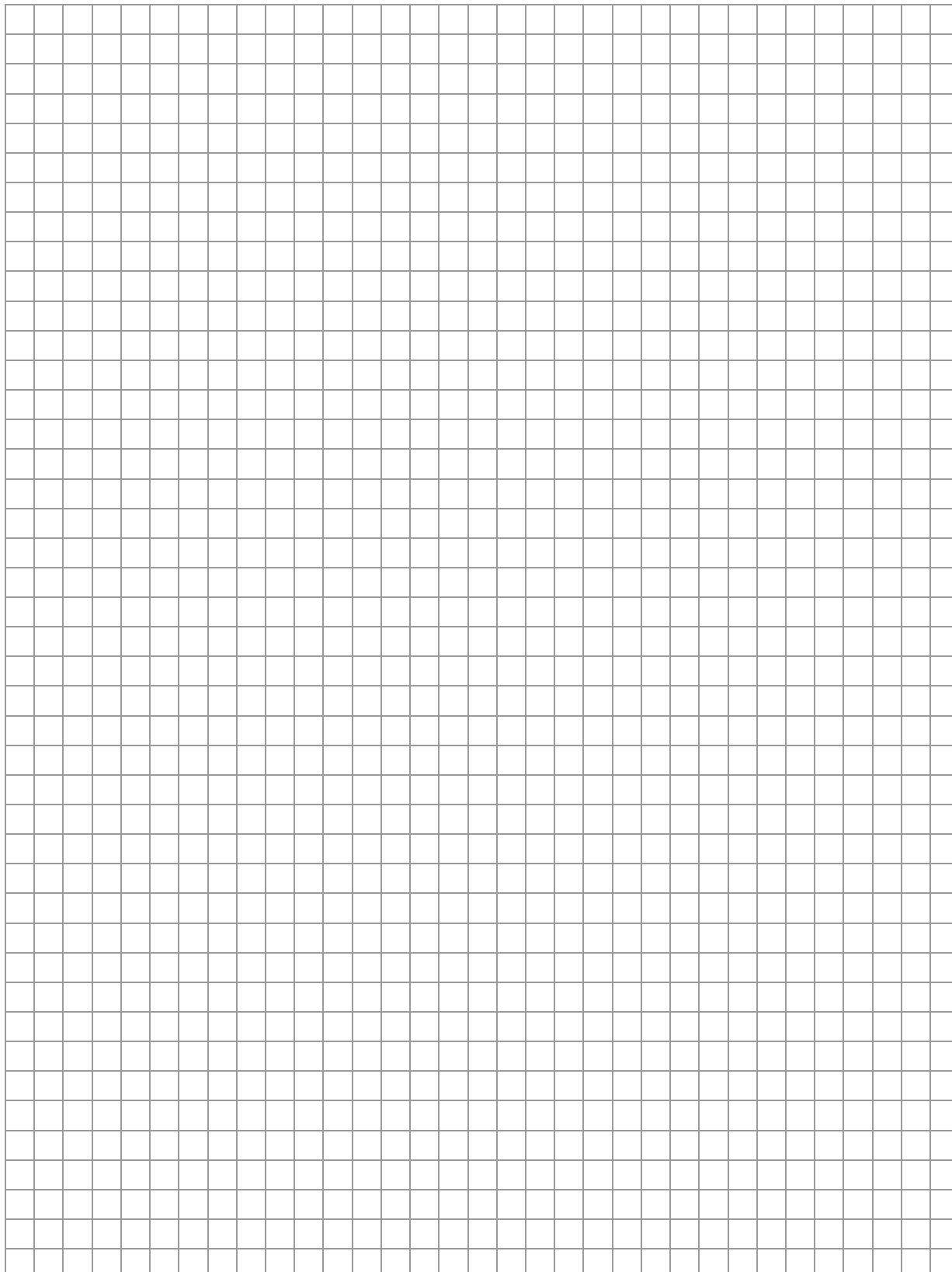
Zadanie 4. (7 pkt)

Trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$ i $|\sphericalangle CAB| = 30^\circ$, jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Wykonaj odpowiedni rysunek.



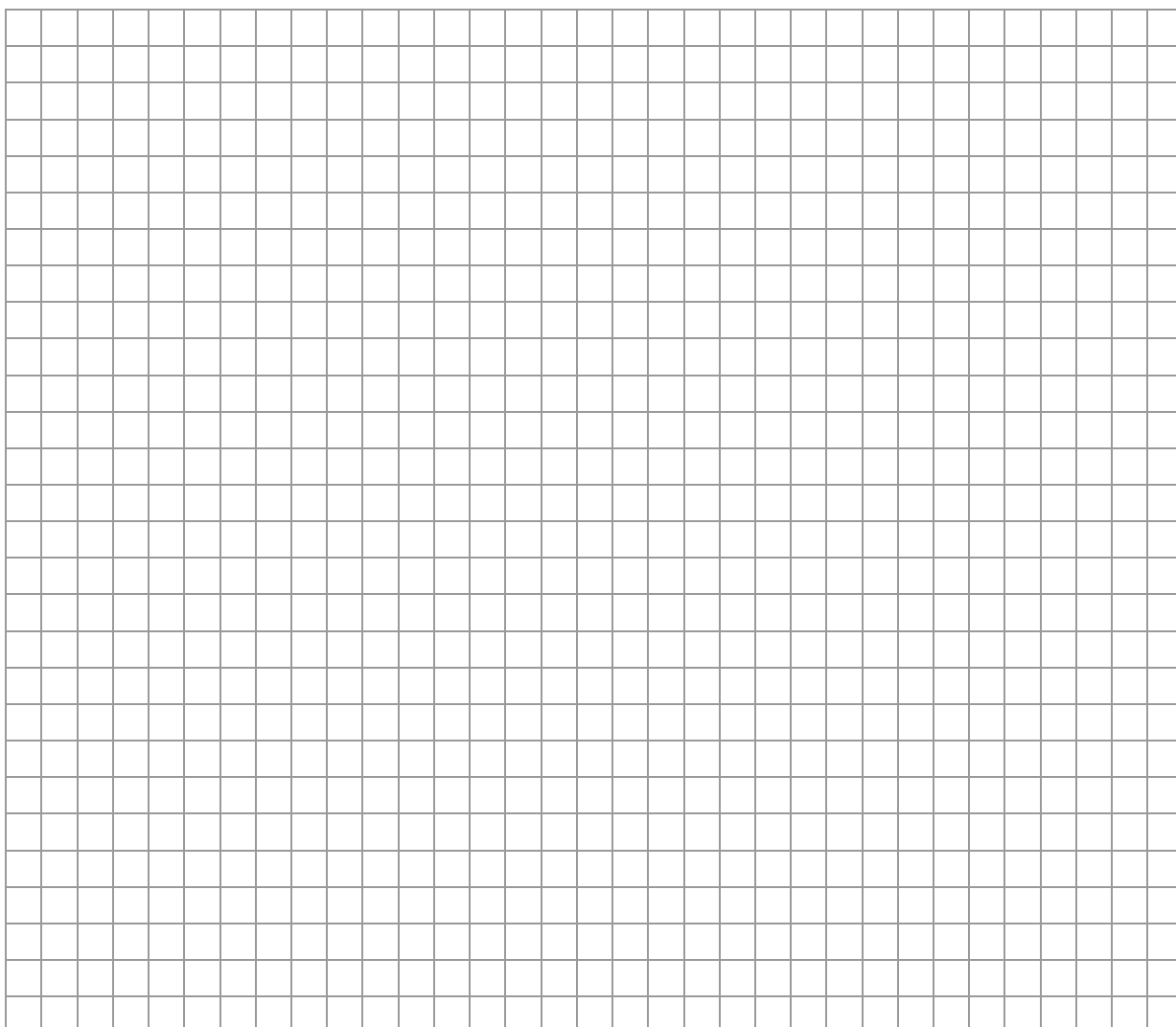
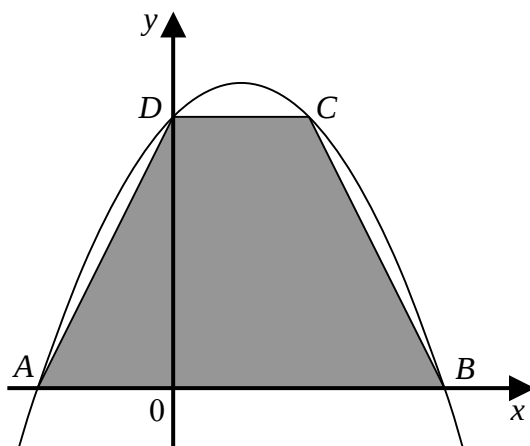
Zadanie 5. (3 pkt)

Sporządź wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości x , dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x , dla których przyjmuje minima lokalne.



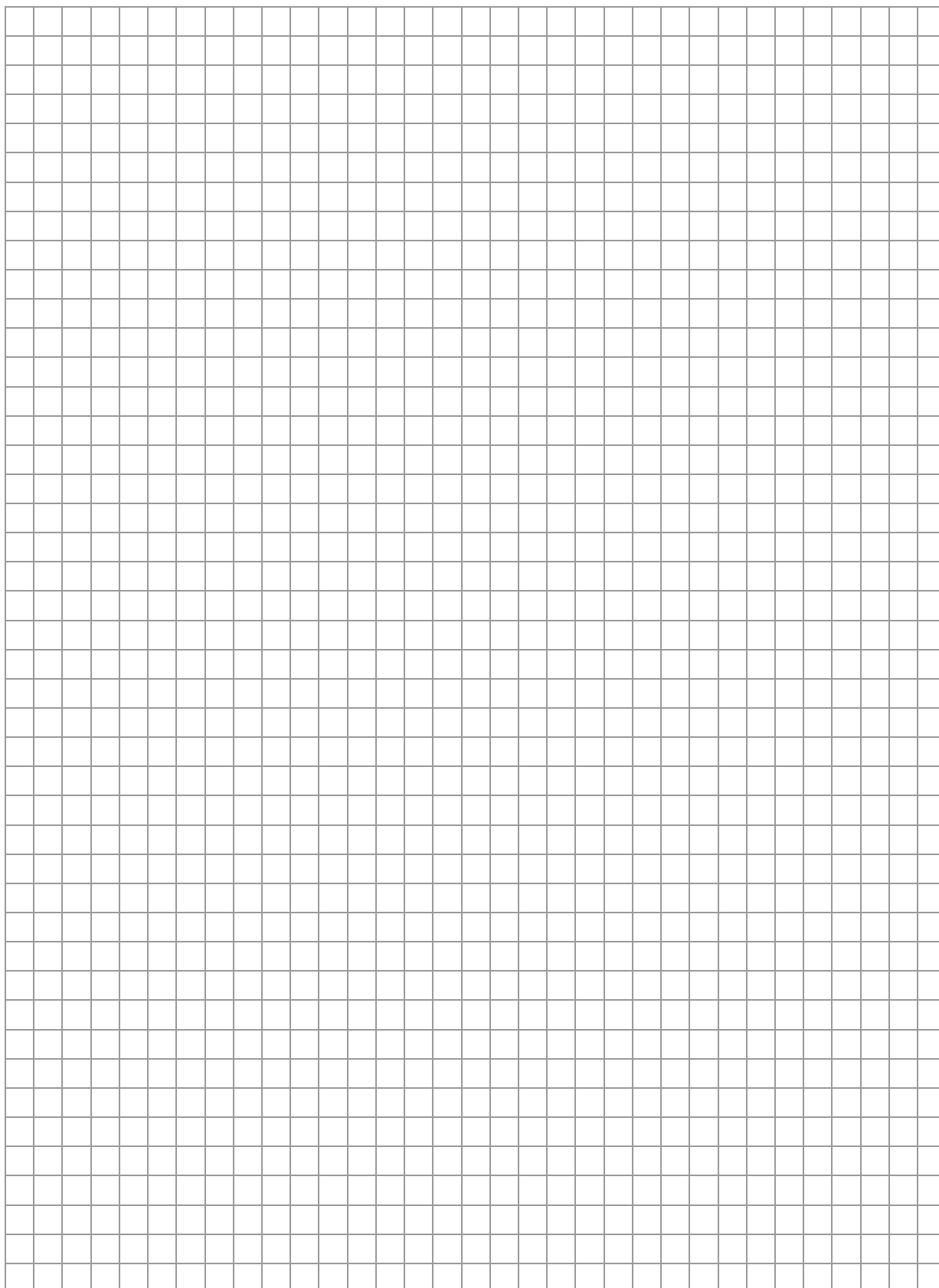
Zadanie 6. (4 pkt)

Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest zawarta w osi Ox , wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$ z osią Oy . Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



Zadanie 7. (3 pkt)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x = \cos x$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.



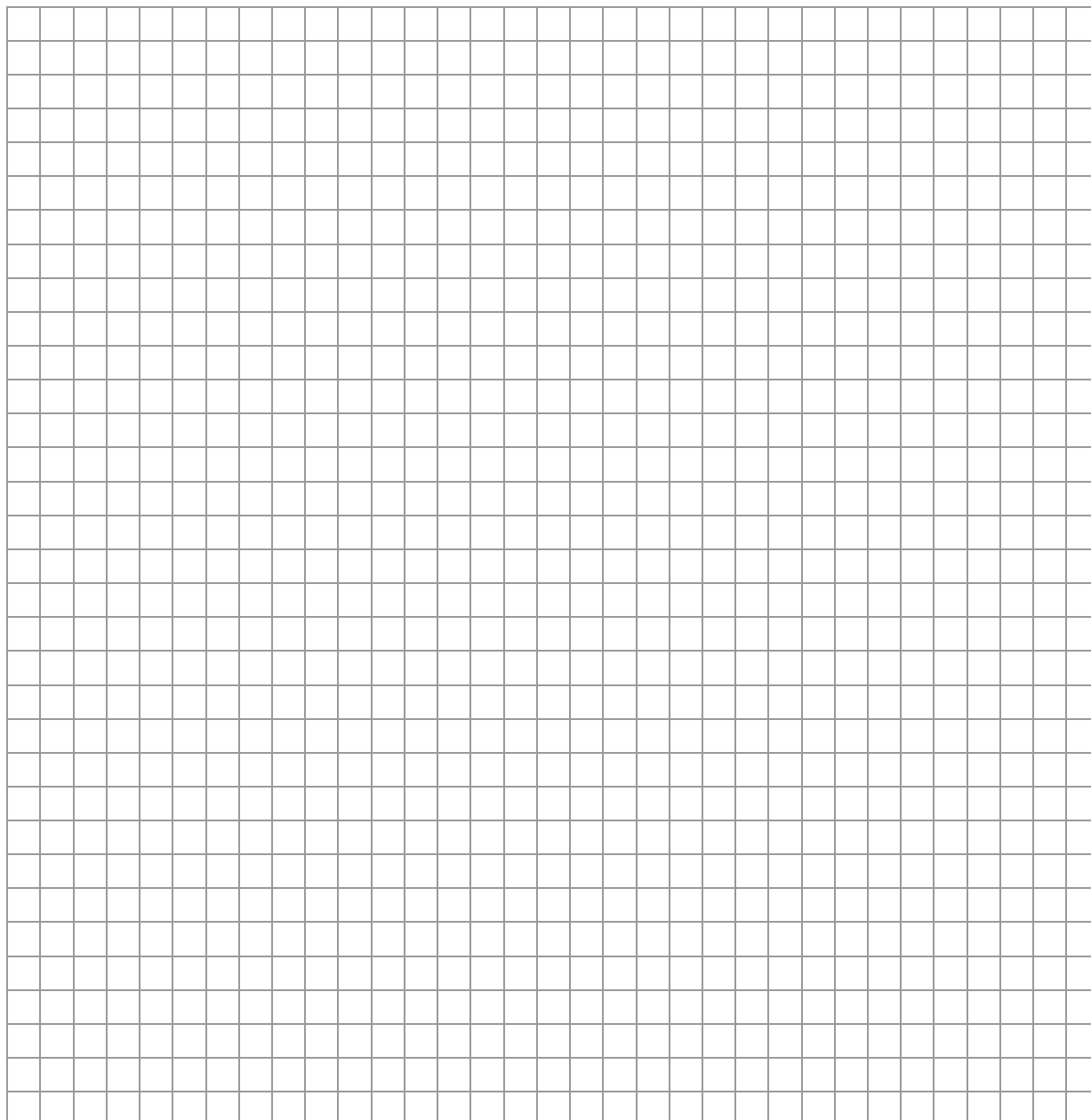
Zadanie 8. (4 pkt)

Uczeń analizował własności funkcji f , której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i która ma pochodną $f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wyniki tej analizy zapisał w tabeli.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	0	$(-)$	0	$(-)$
$f(x)$		2		-1		1	

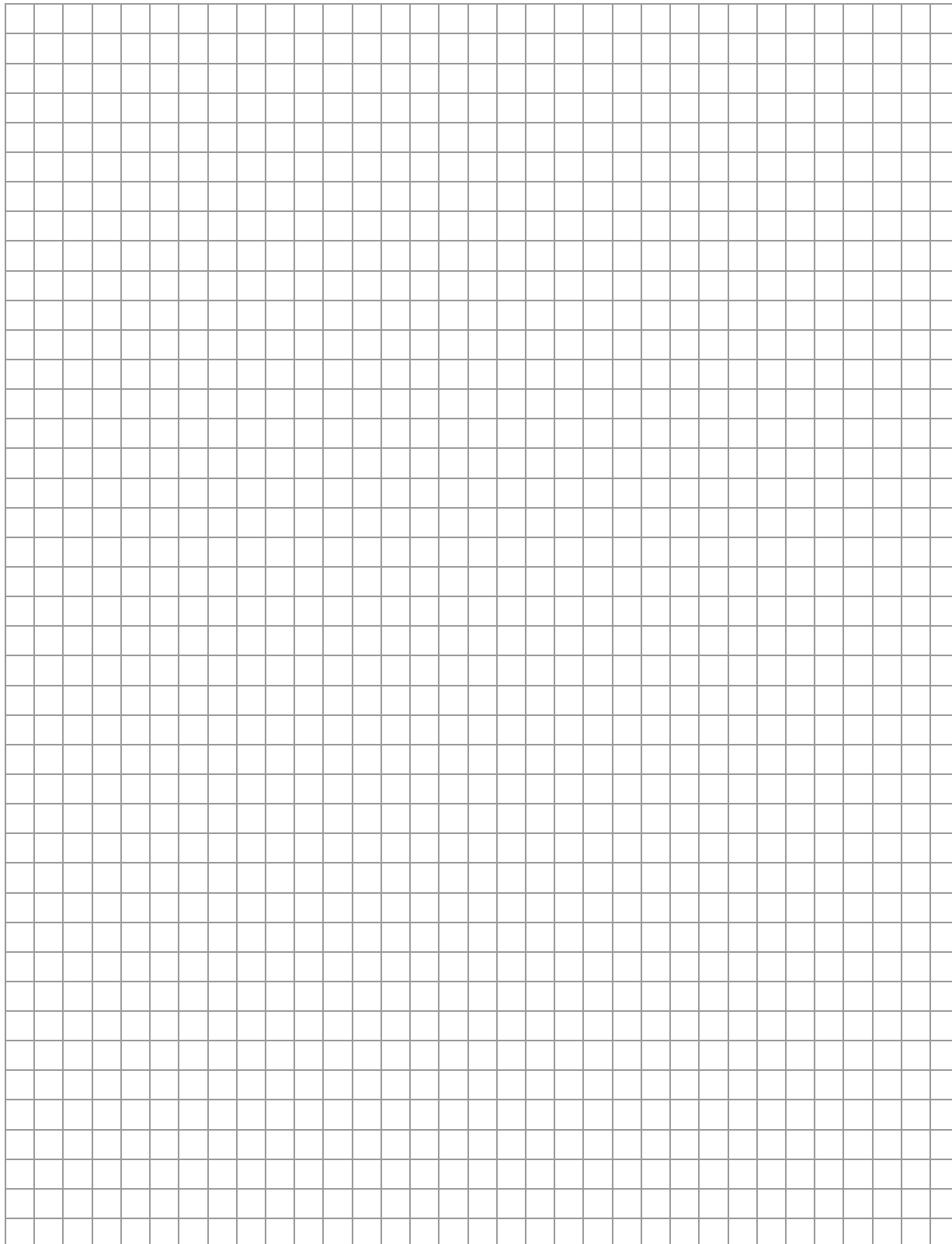
Niestety, wpisując znaki pochodnej, popełnił jeden błąd.

- Przekreśl błędnie wpisany znak pochodnej i wstaw obok prawidłowy.
- Napisz, czy po poprawieniu błędu w tabeli, zawarte w niej dane pozwolą określić dokładną liczbę miejsc zerowych funkcji f . Uzasadniając swoją odpowiedź możesz naszkicować przykładowe wykresy funkcji.



Zadanie 9. (3 pkt)

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi. Mając dane prawdopodobieństwa zdarzeń: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ i $P(A \setminus B) = 0,3$, zbadaj, czy A i B są zdarzeniami niezależnymi.

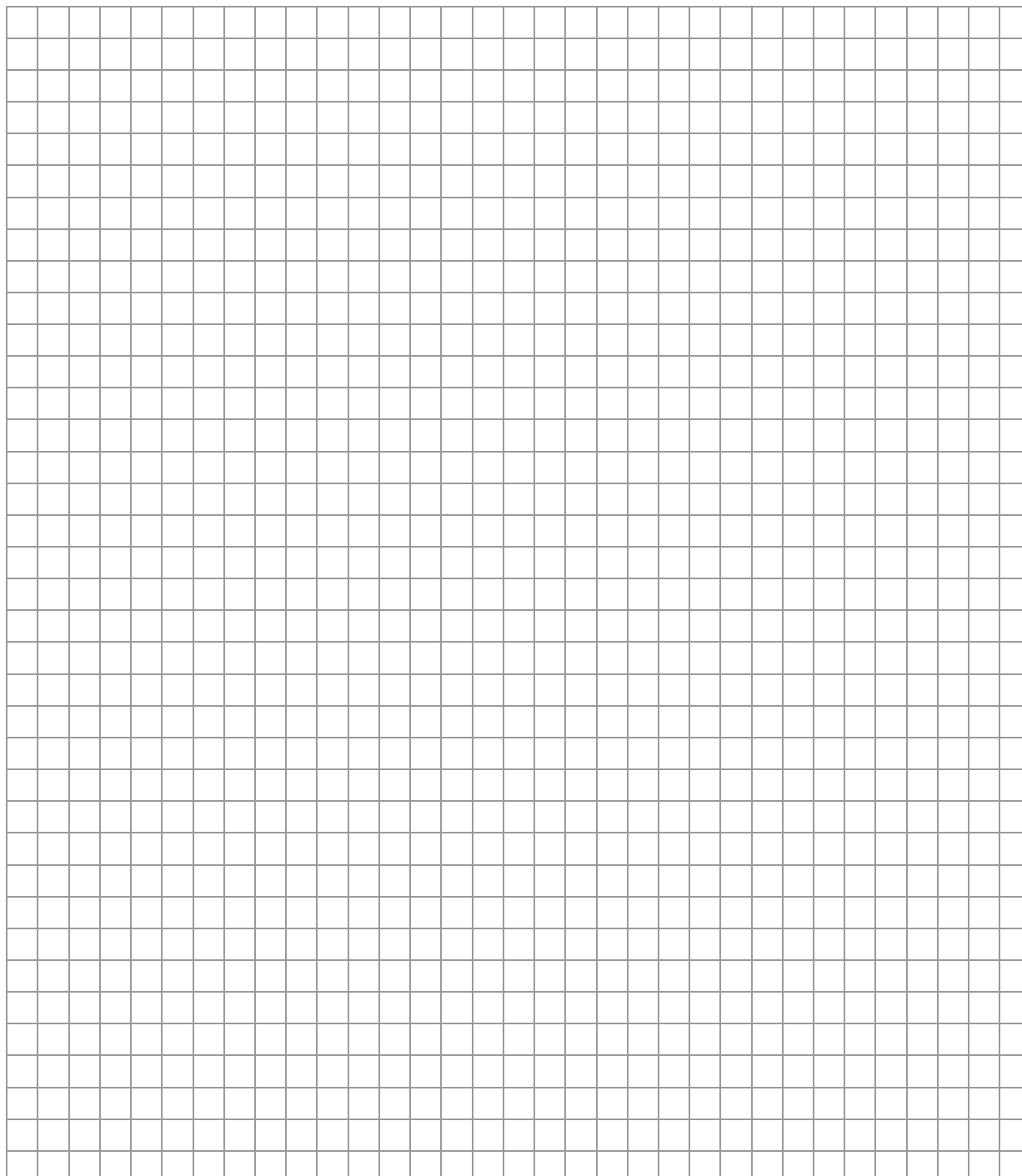


Zadanie 10. (5 pkt)

Ciąg liczbowy (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem

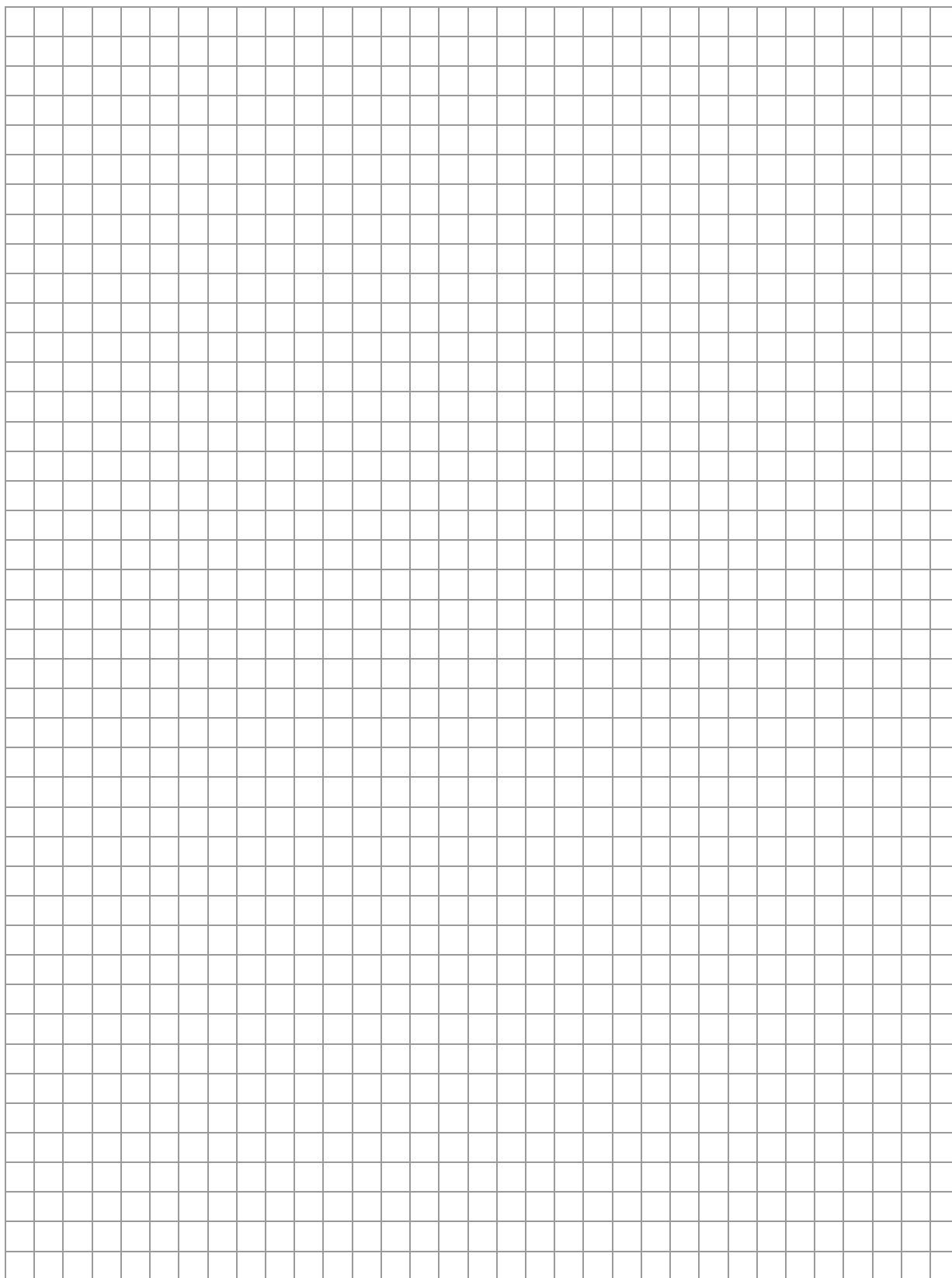
$$a_n = (n-3)(2-p^2), \text{ gdzie } p \in \mathbb{R}.$$

- a) Wykaż, że dla każdej wartości p ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
- b) Dla $p = 2$ oblicz sumę $a_{20} + a_{21} + a_{22} \dots + a_{40}$.
- c) Wyznacz wszystkie wartości p , dla których ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n - pn$ jest stały.



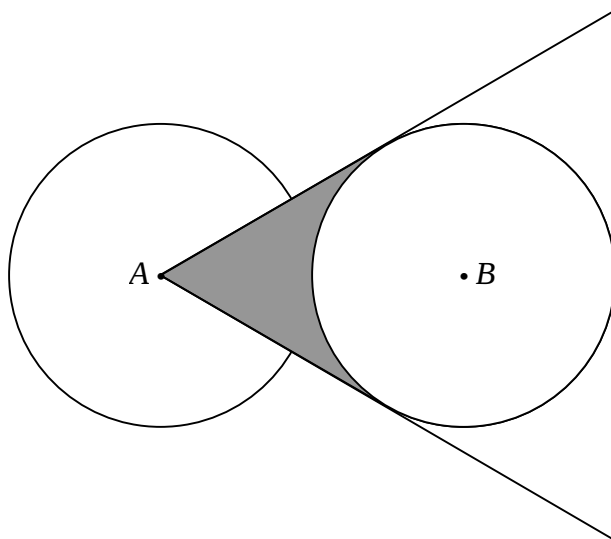
Zadanie 11. (3 pkt)

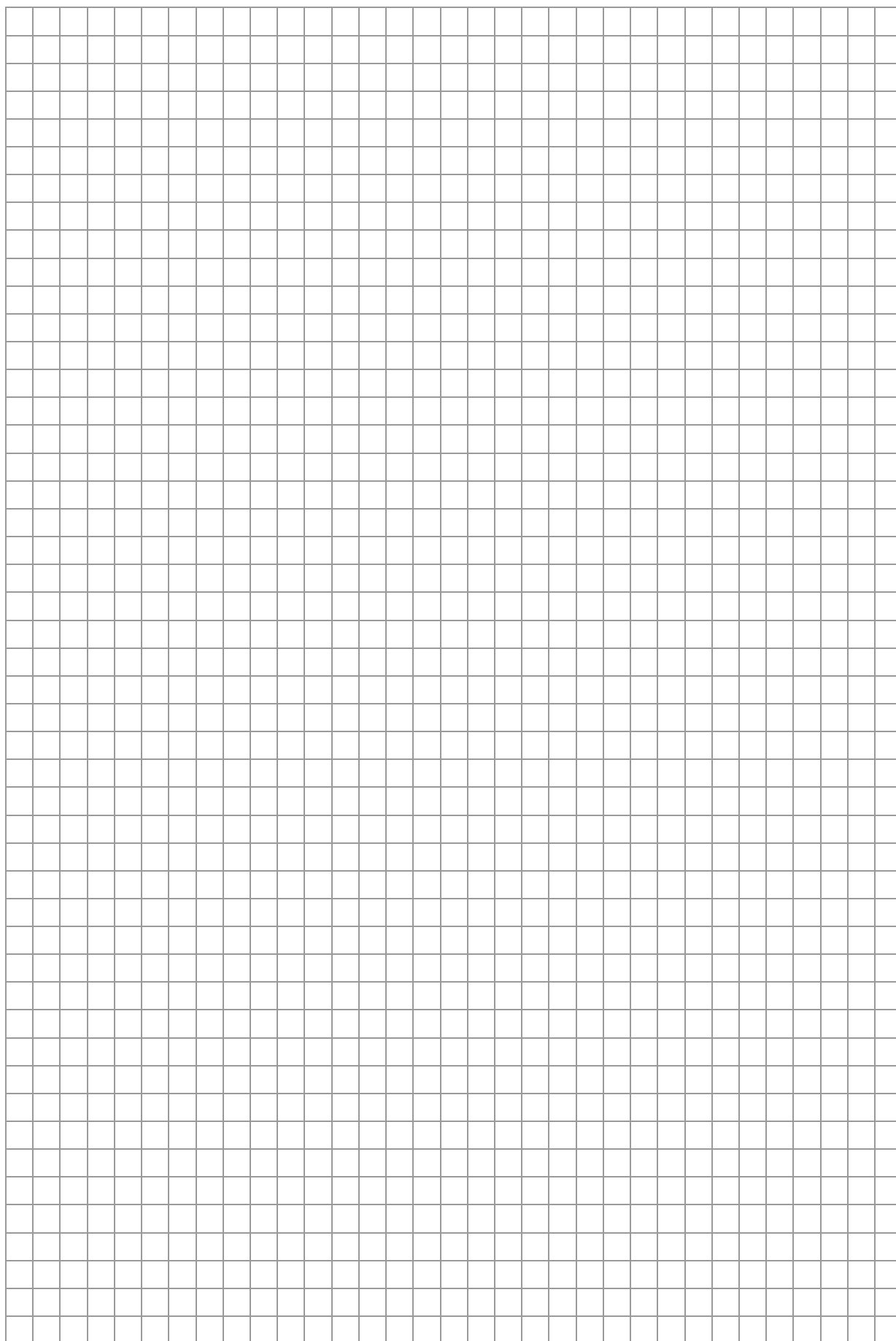
Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej $n > 1$ największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$ o niewiadomej x . Wyznacz wzór funkcji f .



Zadanie 12. (4 pkt)

Dwa okręgi, każdy o promieniu 8, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole zacieniowanej figury (patrz rysunek).





BRUDNOPIS