

## Schemat oceniania arkusza II

**Uwaga:** Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

| Nr dania | Nr czynności | Etapy rozwiązania zadania                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Liczba punktów |
|----------|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 11       | 11.1.        | Zapisanie, że warunki zadania zostaną spełnione wtedy, gdy wyróżnik danego trójkianu będzie ujemny.                                                                                                                                                                                                                    | 1              |
|          | 11.2.        | Obliczenie wyróżnika trójkianu: $\Delta = 2^{2k} - 4 \cdot 2^k - 5$ .                                                                                                                                                                                                                                                  | 1              |
|          | 11.3.        | Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np.: $t = 2^k$ i $t > 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                       | 1              |
|          | 11.4.        | Rozwiązanie nierówności $t^2 - 4t - 5 < 0$ : $t \in (-1; 5)$ .                                                                                                                                                                                                                                                         | 1              |
|          | 11.5.        | Zapisanie nierówności $0 < 2^k < 5$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1              |
|          | 11.6.        | Zapisanie zbioru liczb $k$ spełniających warunki zadania:<br>$\{k \in C : k \leq 2\}$ .                                                                                                                                                                                                                                | 1              |
| 12       | 12.1.        | Zapisanie wielomianu w postaci $W(x) = a(x+2)(x-1)^2$ , gdzie $a \neq 0$ .                                                                                                                                                                                                                                             | 1              |
|          | 12.2.        | Obliczenie współczynnika $a$ , w tym:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>1 punkt, za obliczenie pochodnej <math>W'(x) = a \cdot (x-1)^2 + 2a \cdot (x-1) \cdot (x+2)</math>,</li> <li>1 punkt, za rozwiązanie równania <math>W'(-2) = 18</math> z niewiadomą <math>a</math>:<br/><math>a = 2</math>.</li> </ul> | 2              |
|          | 12.3.        | Wyznaczenie równania szukanej stycznej: $y = 48x - 104$ , w tym:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>1 punkt, za obliczenie <math>W(3) = 40</math>,</li> <li>1 punkt, za obliczenie <math>W'(3) = 48</math> i zapisanie równania stycznej.</li> </ul>                                                            | 2              |
| 13       | 13.1.        | Sporządzenie wykresu funkcji $g(x) = \frac{x-4}{x-2}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                | 2              |
|          | 13.2.        | Sporządzenie wykresu funkcji $f(x) =  g(x) $ .                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1              |
|          | 13.3.        | Odczytanie z wykresu funkcji $f$ szukanych wartości $k$ : $k \in (1; 2)$ , w tym:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>1 punkt za obliczenie wartości <math>f(0) = 2</math></li> </ul>                                                                                                                            | 2              |
| 14       | 14.1.        | Wykorzystanie własności $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i zapisanie, że $P(A \cap B) = \frac{139}{132} - P(A \cup B)$ .                                                                                                                                                                                      | 1              |
|          | 14.2.        | Zauważenie i zapisanie, że $P(A \cup B) \leq 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1              |
|          | 14.3.        | Wynioskowanie z powyższych warunków, że $P(A \cap B) > 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                            | 1              |

|    |                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |   |
|----|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
|    | 14.4.              | Zapisanie odpowiedzi: zdarzenia $A$ i $B$ nie są rozłączne ( $A \cap B \neq \emptyset$ ).                                                                                                                                                                                                                                               | 1 |
|    | <b>Inna metoda</b> | 1. Użycie wzoru $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , gdy $A \cap B = \emptyset$ 1pkt<br>2. Stwierdzenie, że $P(A) + P(B) > 1$ 1pkt<br>3. Stwierdzenie sprzeczności (np. z warunku $P(A \cup B) \leq 1$ ) i wniosek $A \cap B \neq \emptyset$ 2 pkt                                                                                             | 4 |
| 15 | 15.1.              | Zapisanie warunku zbieżności danego ciągu do liczby 0: $\left  \frac{1}{p-1} \right  < 1$ i $p \neq 1$ .                                                                                                                                                                                                                                | 1 |
|    | 15.2.              | Rozwiązanie nierówności $\left  \frac{1}{p-1} \right  < 1$ : $p \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ , w tym: <ul style="list-style-type: none"> <li>1 punkt za metodę rozwiązania</li> <li>1 punkt za napisanie rozwiązania nierówności</li> </ul>                                                                                       | 2 |
|    | 15.3.              | Zapisanie warunku zbieżności ciągu do liczby 2: $\frac{1}{p-1} = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1 |
|    | 15.4.              | Rozwiązanie równania $\frac{1}{p-1} = 1$ i podanie wartości parametru $p$ : $p=2$                                                                                                                                                                                                                                                       | 1 |
| 16 | 16.1.              | Podstawienie wartości $p = -1$ do danego równania i zapisanie alternatywy: $\cos x = 0$ lub $\cos x = 1$ .                                                                                                                                                                                                                              | 1 |
|    | 16.2.              | Wypisanie rozwiązań powyższych równań elementarnych należących do przedziału $\langle 0; 5 \rangle$ : $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\}$ .<br><i>Uwaga:</i><br><i>Jeżeli zdający rozwiąże równania <math>\cos x = 0</math> oraz <math>\cos x = 1</math> w zbiorze liczb rzeczywistych, to otrzymuje 1 punkt.</i> | 1 |
|    | 16.3.              | Zapisanie alternatywy: $\cos x = 1$ lub $\cos x = -p - 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1 |
|    | 16.4.              | Zapisanie, że $x = 0$ jest jednym z szukanych rozwiązań (niezależnie od wartości parametru $p$ ).                                                                                                                                                                                                                                       | 1 |
|    | 16.5.              | Zapisanie układu równań nierówności $-1 \leq -p - 1 < 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1 |
|    | 16.6.              | Rozwiązanie powyższego układu nierówności: $p \in (-2; 0)$ i stwierdzenie, że każda wartość $p \in (-2; 0)$ spełnia warunek określony w zadaniu.                                                                                                                                                                                        | 2 |

|    |             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |
|----|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 17 | 17.1.       | Sporządzenie rysunku uwzględniającego oznaczenia podane w treści zadania.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1 |
|    | 17.2.       | Zapisanie równości pola danego trójkąta i sumy pól trójkątów powstałych z podziału tego trójkąta odcinkiem $CD$ , którego długość $ CD =d$ : $\frac{1}{2}a \cdot d \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2}b \cdot d \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2}a \cdot b$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1 |
|    | 17.3.       | Podstawienie do powyższego równania $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz wyłączenie niewiadomej $d$ przed nawias.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1 |
|    | 17.4.       | Zapisanie rozwiązania powyższego równania w postaci opisanej w tezie twierdzenia.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1 |
|    | Inna metoda | <ul style="list-style-type: none"> <li>1 punkt, za sporządzenie rysunku uwzględniającego oznaczenia podane w treści zadania,</li> <li>1 punkt, za zauważenie i zapisanie, że szukany odcinek <math>CD</math>, o długości, np.: <math> CD =d</math>, jest przekątną kwadratu o boku długości np.: <math>c</math>, wpisanego w dany trójkąt (<math>d = c\sqrt{2}</math>),</li> <li>1 punkt, za wykorzystanie podobieństwa odpowiednich trójkątów (lub wykorzystanie tw. Talesa) i zapisanie równania z niewiadomą <math>c</math>, np.: <math>\frac{b-c}{c} = \frac{b}{a}</math>,</li> <li>1 punkt, za rozwiązanie równania <math>c = \frac{ab}{a+b}</math>: <math>d = \frac{ab}{a+b} \cdot \sqrt{2}</math>.</li> </ul> |   |
| 18 | 18.1.       | Sporządzenie pomocniczego rysunku lub wprowadzenie precyzyjnie opisanych oznaczeń, np.: $\sphericalangle DAB = \alpha$ , $\sphericalangle ABC = \beta$ , $\sphericalangle BCD = \gamma$ , $\sphericalangle CDA = \delta$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1 |
|    | 18.2.       | Zastosowanie własności miar kątów czworokąta wpisanego w okrąg i zapisanie, że np.: $\gamma = 180^\circ - \alpha$ ( $\delta = 180^\circ - \beta$ ).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1 |
|    | 18.3.       | Wyznaczenie miary kąta $\alpha$ : $\alpha = 45^\circ$ (lub $\alpha = 135^\circ$ ) - w tym 1 punkt za skorzystanie z twierdzenia sinusów (lub twierdzenia cosinusów i twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym w kole).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2 |
|    | Inna metoda | <p>Zamiast czynności 18.2 i 18.3:</p> <p>Przekątna tworzy wraz z dwoma promieniami trójkąt prostokątny, ponieważ <math>(10)^2 = (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2</math>.</p> <p>Wyznaczenie miar kątów z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3 |
|    | 18.4.       | Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i zapisanie, że $\sin^2 \beta = \frac{3}{4}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2 |
|    | 18.5.       | Wyznaczenie miary kąta $\beta$ : $\beta = 60^\circ$ (lub $\beta = 120^\circ$ ).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1 |

|    |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |   |
|----|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 19 | 18.6. | Zapisanie odpowiedzi: miary kątów czworokąta $ABCD$ to:<br>$45^\circ$ , $60^\circ$ , $120^\circ$ , $135^\circ$ .<br><i>Uwaga: nie jest oceniana kolejność podawanych miar kątów czworokąta z rozważanej rodziny.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1 |
|    | 19.1. | Sprawdzenie, że nierówność zachodzi dla $n = 5$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1 |
|    | 19.2. | Sformułowanie założenia i tezy indukcyjnej, np.:<br>należy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \geq 5$ zachodzi implikacja: jeżeli $2^k > k^2 + k - 1$ , to $2^{k+1} > (k+1)^2 + (k+1) - 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1 |
|    | 19.3. | Udowodnienie tezy indukcyjnej, w tym:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 punkt, za wykorzystanie założenia indukcyjnego,</li> <li>• 1 punkt, za doprowadzenie do nierówności <math>k^2 - k - 3 &gt; 0</math>,</li> <li>• 2 punkty, za rozwiązanie powyższej nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych oraz za zapisanie, że każda liczba naturalna <math>k \geq 5</math> spełnia nierówność <math>k^2 - k - 3 &gt; 0</math>.</li> </ul> <i>Uwaga: Jeżeli uczeń zauważy i zapisze, że dla <math>k \geq 5</math> iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych <math>k \cdot (k-1)</math> jest liczbą większą niż 3, to otrzymuje obydwa punkty.</i> | 4 |