

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018**

**FORMUŁA OD 2015
„NOWA MATURA”
i
FORMUŁA DO 2014
„STARA MATURA”**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

SIERPIEŃ 2018

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny.** Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeniach o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr ad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
odp.	B	A	A	D	B	B	C	C	D	D	A	D	A	B	C	A	B	C	D	A	D	D	B	C	C

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 16 < 0$.

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + 6x - 16$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 + 6x - 16$
 - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
 $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 100$ i stąd $x_1 = \frac{-6-10}{2} = -8$ oraz $x_2 = \frac{-6+10}{2} = 2$
 - albo
 - stosujemy wzory Viète'a:
 $x_1 \cdot x_2 = -16$ oraz $x_1 + x_2 = -6$, stąd $x_1 = -8$ oraz $x_2 = 2$.

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-8, 2)$ lub $x \in (-8, 2)$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -8$ i $x_2 = 2$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 + 6x - 16$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale obliczy dwa różne pierwiastki trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-8, 2)$ lub $x \in (-8, 2)$, lub $x > -8 \wedge x < 2$

albo

- podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x < 2$ lub $x > -8$, $x < 2$ oraz $x > -8$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -8$, $x_2 = 2$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x \in (8, 2)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do rzeczywistego zbioru rozwiązań lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in (2, -8)$ lub $(2, -8)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^3 + 27)(x^2 - 16) = 0$.

Przykładowe rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników $x^3 + 27$ oraz $x^2 - 16$. Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli $x^3 + 27 = 0$ lub $x^2 - 16 = 0$.

Rozwiązaniem równania $x^3 + 27 = 0$ jest $x = \sqrt[3]{-27} = -3$.

Równanie $x^2 - 16 = 0$ doprowadzamy do postaci iloczynowej $(x - 4) \cdot (x + 4) = 0$.

Przynajmniej jeden z czynników $x - 4$ lub $x + 4$ jest równy 0, czyli $x = 4$ lub $x = -4$.

Wszystkie rozwiązania równania $(x^3 + 27)(x^2 - 16) = 0$,

to $x = -3$ lub $x = 4$, lub $x = -4$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania $x^3 + 27 = 0$ i $x^2 - 16 = 0$
albo

- wyznaczy poprawnie (lub poda) rozwiązania jednego z równań: $x^3 + 27 = 0$ lub $x^2 - 16 = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

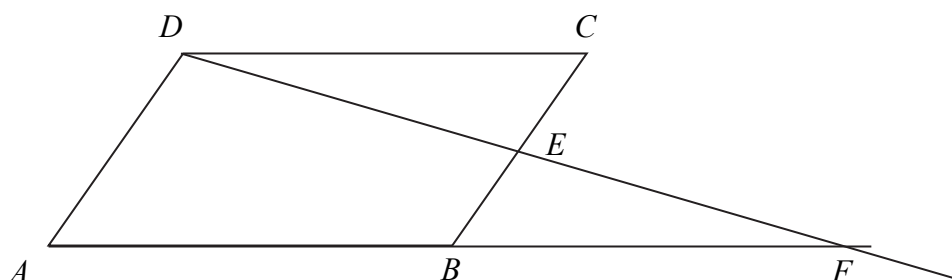
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x = -3$ lub $x = 4$, lub $x = -4$.

Uwagi

- Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
- Jeżeli zdający uzyska trafne rozwiązania równania, ale w wyniku błędnej metody, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie uzyska 1 punktu za zapisanie dwóch równań $x^3 + 27 = 0$ i $x^2 - 16 = 0$.
- Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pierwiastki wielomianu $(x^3 + 27)(x^2 - 16)$ i poda niewłaściwą odpowiedź, np. $x \in \mathbb{R} - \{-4, -3, 4\}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC . Z wierzchołka D poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie E . Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt B jest środkiem odcinka AF .



Przykładowe rozwiązanie

I sposób (podobieństwo)

Rozpatrujemy trójkąty AFD i BFE .

Kąty DAF i EBF są odpowiadające i odcinki AD i BC są równoległe, więc $|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle EBF|$.

Tak samo wnioskujemy, że $|\sphericalangle ADF| = |\sphericalangle BEF|$. Ponadto kąt przy wierzchołku F jest kątem wspólnym w obu trójkątach, więc z cechy kkk podobieństwa trójkątów wnioskujemy, że trójkąty AFD i BFE są podobne.

Stąd wynika proporcja

$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|},$$

ale $|BE| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|AD|$, gdyż punkt E jest środkiem boku BC .

Zatem

$$\frac{|AD|}{\frac{1}{2}|AD|} = \frac{|AF|}{|BF|}, \text{ czyli } |AF| = 2|BF|,$$

co należało wykazać.

II sposób (przystawanie)

Rozpatrujemy trójkąty BFE oraz CDE .

1. Kąty BEF i CED są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle CED|$.
2. Kąty FBE i DCE są naprzemianległe i proste AB i CD są równoległe, więc $|\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle DCE|$
3. Punkt E jest środkiem boku BC , więc $|BE| = |EC|$.

Stąd, na mocy cechy *kbk* przystawania trójkątów wnioskujemy, że trójkąty BFE i CDE są przystające. Zatem $|BF| = |CD|$.

Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, więc $|AB| = |CD|$. Z ostatnich dwóch równości wynika, że $|AB| = |BF|$, co oznacza, że punkt B jest środkiem odcinka AF .

To należało wykazać.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje **1 p.**
gdy

- zapisze lub wykorzysta przystawanie trójkątów BFE oraz CDE

albo

- zauważy podobieństwo trójkątów AFD i BFE , zapisze proporcję, wynikającą z tego podobieństwa, np. $\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje **2 p.**
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–2)

Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie wyrażenie $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$

i otrzymujemy

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 4,$$

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2,$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Ta kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy poprawnie przekształci nierówność do postaci, w której liczby a i b występują jedynie

w wyrażeniach: a^2 , b^2 i ab , np.: $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$ lub $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a^2 + b^2 \geq 2ab$ i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności $(a-b)^2 \geq 0$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeżeli zdający w wyniku poprawnych przekształceń równoważnych otrzyma nierówność $(a+b)^2 \geq 4ab$, to otrzymuje **1 punkt**.
7. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ i dopisze komentarz o średnich, uzasadniający jej prawdziwość dla dowolnych liczb dodatnich a , b , to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30. (0–2)

Dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równy 34, a suma jego ośmiu początkowych wyrazów jest równa 110. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na a_9 :

$$a_9 = a_1 + (9-1) \cdot r.$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_8 :

$$S_8 = \frac{2a_1 + (8-1) \cdot r}{2} \cdot 8.$$

Otrzymujemy układ równań

$$34 = a_1 + 8r \text{ i } 110 = 8a_1 + 28r.$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -2, r = 4, 5.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi a_1 i r wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\text{np.: } 34 = a_1 + 8r \text{ i } 110 = \frac{2a_1 + 7r}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -2$ i obliczy różnicę ciągu: $r = 4, 5$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 8 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że $a_1 = -2$ i $r = 4, 5$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że $a_1 = -2$ i $r = 4, 5$, ale nie zapisze wszystkich 8 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = -2$ i $r = 4, 5$, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający dodaje do sumy ośmiu początkowych wyrazów wyraz dziewiąty i zapisuje właściwe równanie z niewiadomą a_1 , to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**.

Zadanie 31. (0–2)

Punkty $A = (2, 4)$, $B = (0, 0)$, $C = (4, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Punkt D jest środkiem boku AC tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej BD .

Przykładowe rozwiązania

Punkt D jest środkiem odcinka AC , więc ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$D = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{4+(-2)}{2} \right) = (3, 1).$$

Pozostaje wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $B = (0, 0)$ i $D = (3, 1)$.

I sposób

Szukane równanie ma postać $y = ax + b$. Ponieważ punkty B i D leżą na tej prostej, więc możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot 3 + b = 1 \\ a \cdot 0 + b = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $b = 0$, a odejmując stronami otrzymujemy $3a = 1$, czyli $a = \frac{1}{3}$.

II sposób

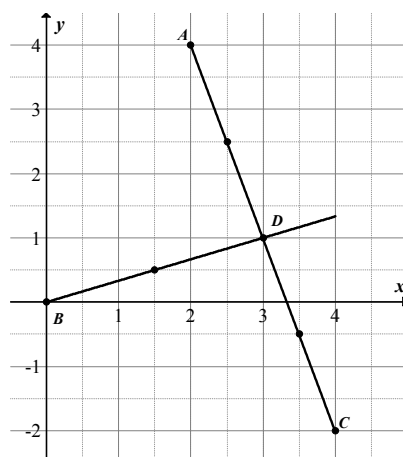
Podstawmy współrzędne punktów $D = (3, 1)$ oraz $B = (0, 0)$ do równania prostej, przechodzącej przez dane dwa punkty:

$$(y - 1)(0 - 3) - (0 - 1)(x - 3) = 0.$$

Stąd $-3(y - 1) + x - 3 = 0$, czyli $-3y + 3 + x - 3 = 0$. Zatem $y = \frac{1}{3}x$.

III sposób

Możemy zaznaczyć w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta i korzystając z punktów kratowych ustalić zależność między prostą AC i prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez środek odcinka AC , np. tak, jak na rysunku.



Zauważamy wówczas, że szukana prosta ma równanie $y = \frac{1}{3}x$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- wyznaczy lub poda współrzędne środka D odcinka AC : $D = (3, 1)$

albo

- zaznaczy w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta ABC i zaznaczy na rysunku prostą BD oraz wyznaczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej AC : -3 .

Zdający otrzymuje 2 p.

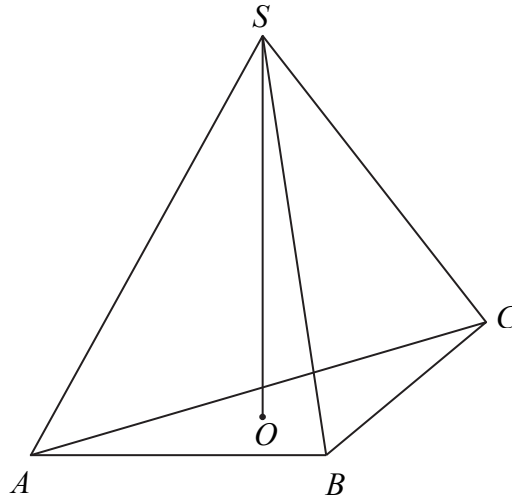
gdy wyznaczy równanie prostej BD : $y = \frac{1}{3}x$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej AC i przechodzącej przez punkt B oraz zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt ABC jest równoramienny, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej AC i przechodzącej przez punkt B , ale nie zapisze (nie zaznaczy na rysunku), że trójkąt ABC jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający wyznacza równanie prostej prostopadłej do prostej AC i przechodzącej przez punkt B i popełni przy tym błąd lub nie doprowadzi rozwiązania do końca, ale zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt ABC jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 32. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość a . Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



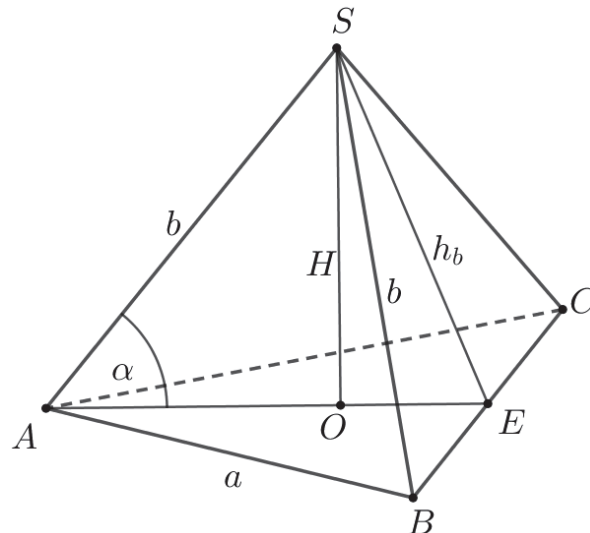
Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

α – kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy,

E – środek krawędzi BC .



Z podanej zależności pól $2 \cdot P_p = P_b$ otrzymujemy równanie

$$2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b,$$

skąd otrzymujemy

$$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trójkąt ABC jest równoboczny, spodek O wysokości ostrosłupa jest środkiem ciężkości tego trójkąta, więc $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $|AO| = \frac{2}{3}|AE|$. Stąd

$$|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym BES i otrzymujemy

$$|SB| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Ponieważ w ostrosłupie prawidłowym krawędzie boczne mają równe długości, więc

$$|AS| = |BS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Z definicji cosinusa w trójkącie prostokątnym AOS otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|}. \quad \cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Uwaga

Zamiast wyznaczać długość krawędzi bocznej może wyznaczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OES wysokość SO ostrosłupa:

$$|SO| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

Następnie z trójkąta prostokątnego ASO możemy obliczyć tangens kąta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|SO|}{|AO|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych możemy obliczyć cosinus kąta α :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$. Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\frac{7}{4} \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{4}{7}.$$

Stąd $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, gdyż kąt α jest ostry.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający:

- zaznaczy na rysunku kąt α lub zapisze $\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|}$

albo

- wyznaczy długość odcinka AO : $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

albo

- wyznaczy długość odcinka EO : $|EO| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a i h_b wynikające z zależności między polem podstawy i polem powierzchni bocznej ostrosłupa: $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy wysokość ściany bocznej ostrosłupa opuszczoną na krawędź podstawy:

$$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- wyznaczy długość krawędzi bocznej $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ i nie wyznaczy długości odcinka AO

albo

- wyznaczy długość odcinka AO i wysokość ostrosłupa: $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $|SO| = \frac{a}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający:

- wyznaczy $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ i $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

albo

- obliczy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

albo

- obliczy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy wartość $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru na pole trójkąta równobocznego, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, przyjmując, że punkt O jest środkiem odcinka AE lub przyjmie, że $|AO| = \frac{1}{3}|AE|$, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując $P_p = 2P_b$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

6. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując $2P_p = P_{sb}$ lub $P_p = 2P_{sb}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
8. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązuje zadanie, oblicza $\operatorname{tg} \alpha$ lub $\sin \alpha$, a następnie podaje przybliżoną wartość cosinusa z tablic, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 33. (0–4)

Ze zbioru $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ losujemy liczbę a , natomiast ze zbioru $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ losujemy liczbę b . Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (a, b) liczb, gdzie $a \in A$ oraz $b \in B$.

Liczba $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 6 \cdot 4 = 24.$$

Niech Z oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe. Funkcja liniowa jest rosnąca, gdy współczynnik kierunkowy a jest dodatni, więc $a \in \{1, 2, 3\}$. Rosnąca funkcja liniowa ma dodatnie miejsce zerowe tylko wówczas, gdy jej wykres przecina oś Oy w punkcie o ujemnej rzędnej. Zatem współczynnik b musi być równy -1 .

Zbiór Z ma więc postać

$$Z = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1)\}.$$

Zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu Z jest równa

$$|Z| = 3.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia Z jest równe:

$$P(Z) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 4 = 24$ lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

albo

- zapisze, że funkcja liniowa f jest rosnąca tylko dla $a \in \{1, 2, 3\}$,

albo

- zapisze, że funkcja liniowa f , jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe dla $b = -1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 4$ lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne oraz zapisze, że funkcja liniowa f jest rosnąca tylko dla $a \in \{1, 2, 3\}$

albo

- zapisze, że funkcja liniowa f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe dla $a \in \{1, 2, 3\}$ i $b = -1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy lub poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 6 \cdot 4$ oraz

- wyznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu Z :
 $(Z = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1)\})$

albo

- zapisze, że $a \in \{1, 2, 3\}$, $b = -1$ oraz $|Z| = 3$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy szukane prawdopodobieństwo: $\frac{1}{8}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poda, że $|Z| = 3$ i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu Z i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, ale zapisze, że $a \in \{1, 2, 3\}$ (albo tylko $b = -1$), to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda, że $|Z| = 3$ i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu Z i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, nie zapisze, że $a \in \{1, 2, 3\}$ oraz nie zapisze, że $b = -1$, to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający wypisze 3 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu Z i przyjmie, że takimi zdarzeniami są też inne pary postaci (a, b) , gdzie $a \in \{1, 2, 3\}$, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile przyjęcie tych niepoprawnych zdarzeń elementarnych jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsc zerowych utworzonych funkcji.
5. Jeżeli zdający wypisze 2 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu Z i trzecie poprawne potraktuje jako zdarzenie niesprzyjające zdarzeniu Z , to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile odrzucenie tego poprawnego zdarzenia elementarnego jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsca zerowego utworzonej funkcji.
6. Jeżeli zdający zamiast rozważać $a > 0$ rozważa $a < 0$, to jego rozwiązanie może być ocenione tak jak w niżej wymienionych przypadkach.
Przypadek 6a. Jeśli zdający, przy rozważanym $a < 0$, rozważa $b < 0$, rysuje wykres rosnącej funkcji liniowej (lub w inny sposób sygnalizuje, że rozważa funkcję rosnącą) i poprawnie oblicza $|\Omega|$, to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
Przypadek 6b. Jeśli zdający, przy rozważanym $a < 0$, rozważa funkcję liniową malejącą i konsekwentnie $b > 0$, a ponadto poprawnie oblicza $|\Omega|$, to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
7. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie metodą drzewkową to może otrzymać:
4 punkty – za rozwiązanie w pełni poprawne;
3 punkty – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

$a = 1, 2, 3$ i że a może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, $b = -1$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$;

2 punkty – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a > 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, $b < 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$

albo

- $a = 1, 2, 3$ i $b = -1$;

1 punkt – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a = 1, 2, 3$

albo

- $a > 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

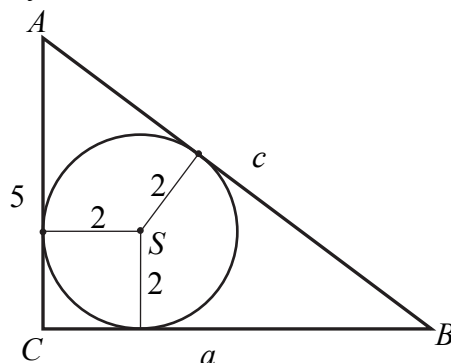
8. Jeżeli zdający poprawnie obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych (lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne) i zapisze, że funkcja liniowa f , jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe gdy $b = -1$, to może otrzymać **2 punkty**.

Zadanie 34. (0–4)

W trójkącie prostokątnym ACB przyprostokątna AC ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ACB .

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta ACB możemy zapisać na dwa sposoby. Ze wzoru na pole trójkąta z podstawą i prostopadłą doń wysokością trójkąta otrzymujemy

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot a = \frac{5}{2}a,$$

a ze wzoru na pole trójkąta z promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt otrzymujemy

$$P_{ACB} = p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (|AC| + |BC| + |AB|) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (5 + a + c) \cdot 2 = a + c + 5.$$

Stąd otrzymujemy

$$a + c + 5 = \frac{5}{2}a,$$

$$c = \frac{3}{2}a - 5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$5^2 + a^2 = \left(\frac{3}{2}a - 5\right)^2,$$

$$25 + a^2 = \frac{9}{4}a^2 - 15a + 25,$$

$$\frac{5}{4}a^2 - 15a = 0,$$

$$\frac{5}{4}a(a - 12) = 0.$$

Stąd

$$a = 0 \text{ lub } a = 12.$$

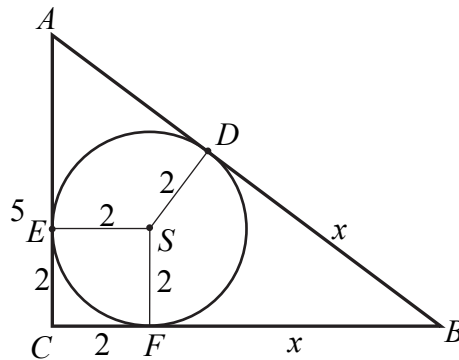
Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania, więc $a = 12$.

Pole trójkąta ACB jest więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \cdot 12 = 30.$$

II sposób

Poprowadźmy promień okręgu wpisanego w trójkąt ACB do punktów styczności tego okręgu z bokami tego trójkąta i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Czworokąt $CFSE$ jest kwadratem o boku długości 2, gdyż kąty przy wierzchołkach C, F i E są proste, a boki ES i FS są równej długości. Zatem $|EC| = |FC| = 2$.

Stąd wynika, że $|AE| = |AC| - |EC| = 5 - 2 = 3$.

Oznaczmy $x = |BF|$. Zatem $|BC| = |BF| + |CF| = x + 2$.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy

$$|BD| = |BF| = x \text{ oraz } |AD| = |AE| = 3.$$

Zatem $|AB| = |AD| + |BD| = 3 + x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2,$$

$$(3 + x)^2 = 5^2 + (x + 2)^2,$$

$$9 + 6x + x^2 = 25 + x^2 + 4x + 4,$$

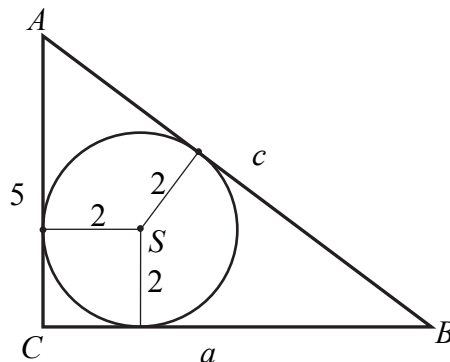
$$x = 10.$$

Przyprostokątna AC ma więc długość $|BC| = x + 2 = 12$, więc pole trójkąta ACB jest równe

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

III sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny otrzymujemy

$$2 = \frac{5 + a - c}{2},$$

$$4 = 5 + a - c,$$

$$c = a + 1.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$5^2 + a^2 = c^2.$$

Zatem

$$5^2 + a^2 = (a + 1)^2,$$

$$25 + a^2 = a^2 + 2a + 1,$$

$$2a = 24,$$
$$a = 12.$$

Pole trójkąta ACB równe więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \cdot 12 = 30.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze zależność między długościami przyprostokątnej BC i przeciwprostokątnej trójkąta, np.: $5^2 + a^2 = c^2$ lub $a + c + 5 = \frac{5}{2}a$ lub $2 = \frac{5+a-c}{2}$

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku równości co najmniej dwóch par odpowiednich odcinków, wynikające z twierdzenia o odcinkach stycznych, np.: $|EC| = |FC|$ i $|BF| = |BD|$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć długość przyprostokątnej BC , np.: $(c = \frac{3}{2}a - 5 \text{ i } 5^2 + a^2 = c^2)$ lub $(2 = \frac{5+a-c}{2} \text{ i } 5^2 + a^2 = c^2)$

albo

- zapisze długości boków BC i AB trójkąta ACB w zależności od jednej zmiennej, np. długości x odcinka BF : $|BC| = x + 2$, $|AB| = x + 3$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą prowadzące do wyznaczenia długości boków

BC i AB trójkąta, np.: $5^2 + a^2 = (\frac{3}{2}a - 5)^2$ lub $(x + 3)^2 = (x + 2)^2 + 5^2$ lub $5^2 + a^2 = (a + 1)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy pole trójkąta ACB : $P_{ACB} = 30$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując nieistniejący wzór „kwadrat sumy/różnicy = suma/różnica kwadratów”, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik $\frac{1}{2}$, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przyprostokątnej BC , to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**, o ile poprawnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przeciwprostokątnej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, za zapisanie (zaznaczenie) równości odcinków stycznych.