

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018**

**MATEMATYKA**

**POZIOM PODSTAWOWY**

**FORMUŁA OD 2015**

**(„NOWA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

**ARKUSZ MMA-P1**

**MAJ 2018**

## Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi (zaznaczenie właściwego pola na karcie odpowiedzi).

### Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                  | Poprawna odp. (1 p.) |           |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6). | Wersja I             | Wersja II |
|                                                    |                                                                                                                                                                                        | B                    | D         |

### Zadanie 2. (0–1)

|                                                    |                                                                                                                                             |          |           |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3). | Wersja I | Wersja II |
|                                                    |                                                                                                                                             | C        | A         |

### Zadanie 3. (0–1)

|                                                    |                                                                                                                                              |          |           |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4). | Wersja I | Wersja II |
|                                                    |                                                                                                                                              | C        | D         |

### Zadanie 4. (0–1)

|                                |                                                                                                     |          |           |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9). | Wersja I | Wersja II |
|                                |                                                                                                     | C        | A         |

### Zadanie 5. (0–1)

|                                         |                                                                                                        |          |           |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3). | Wersja I | Wersja II |
|                                         |                                                                                                        | A        | C         |

### Zadanie 6. (0–1)

|                                         |                                                                                                                                                                                    |          |           |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji | 4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje) (4.10). | Wersja I | Wersja II |
|                                         |                                                                                                                                                                                    | C        | D         |

**Zadanie 7. (0–1)**

|                                         |                                                                                                                                |                 |                  |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych (3.8). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                         |                                                                                                                                | <b>D</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 8. (0–1)**

|                                          |                                                                                              |                 |                  |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej (4.7). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                          |                                                                                              | <b>D</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 9. (0–1)**

|                                                    |                                                                                         |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru (4.8). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                         | <b>C</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 10. (0–1)**

|                                         |                                                                                                                |                 |                  |
|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji | 4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie (4.6). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                         |                                                                                                                | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 11. (0–1)**

|                                |                                                                                 |                 |                  |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                 | <b>A</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 12. (0–1)**

|                                |                                                                                                                |                 |                  |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                | <b>A</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 13. (0–1)**

|                                |                                                                                                                |                 |                  |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                | <b>B</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 14. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                      |                 |                  |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 6. Trygonometria. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych – odczytanych z tablic (6.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                      | <b>C</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 15. (0–1)**

|                                          |                                                                                                        |                 |                  |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                          |                                                                                                        | <b>A</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 16. (0–1)**

|                                   |                                                                                           |                 |                  |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                   |                                                                                           | <b>A</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 17. (0–1)**

|                                |                                                                                                                      |                 |                  |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych (7.4). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                      | <b>B</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 18. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                 |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.5). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                 | <b>B</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 19. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                              |                 |                  |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątowość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                              | <b>B</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 20. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                 |                 |                  |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów (9.1). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                                 | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 21. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                                     |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów (9.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                                                     | <b>A</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 22. (0–1)**

|                                                    |                                                                                      |                 |                  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość walca, stożka, kuli (G11.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                      | <b>A</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 23. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                     |                 |                  |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.1). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>B</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 24. (0–1)**

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                  |                 |                  |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania (10.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>D</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 25. (0–1)**

|                                |                                                                                                                                                                                                |                 |                  |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                                                                                                | <b>D</b>        | <b>B</b>         |

## Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 26. (0–2)

|                                                    |                                                                                                |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5). |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap** to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 3x - 5$ .

**Drugi etap** to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- zapisujemy nierówność w postaci  $2x^2 - 3x - 5 > 0$  i obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 3x - 5$ 
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:  
 $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$  i stąd  $x_1 = \frac{3-7}{4} = -1$  oraz  $x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$
- albo
  - stosujemy wzory Viète’a:  
 $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$  oraz  $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ , stąd  $x_1 = -1$  oraz  $x_2 = \frac{5}{2}$ .

Drugi etap rozwiązania: podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ .

#### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.  
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = -1$  i  $x_2 = \frac{5}{2}$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

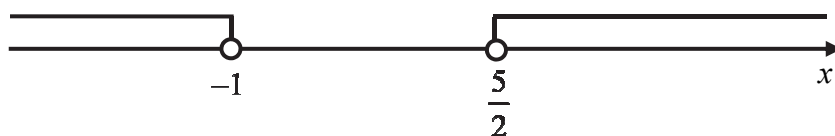
- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale otrzyma nierówność, w której po jednej stronie występuje pełny trójmian kwadratowy posiadający dwa różne pierwiastki i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.  
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ ,  
lub  $x < -1 \vee x > \frac{5}{2}$

albo

- podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



### Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik  $\Delta$  jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci:  $x < -1$  i  $x > \frac{5}{2}$ ,  $x < -1$  oraz  $x > \frac{5}{2}$ , itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$  i błędnie zapisze odpowiedź, np.  $x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po poprawnym rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do zbioru  $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$  lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $(-\infty, \frac{5}{2}) \cup (-1, +\infty)$ ,  $(+\infty, \frac{5}{2}) \cup (-1, -\infty)$ , to przyznajemy **2 punkty**.

### Zadanie 27. (0–2)

|                                          |                                                                                                                          |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$ (3.7). |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Przykładowe rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników  $x^3 + 125$  oraz  $x^2 - 64$ . Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli  $x^3 + 125 = 0$  lub  $x^2 - 64 = 0$ .

Rozwiązaniem równania  $x^3 + 125 = 0$  jest  $x = \sqrt[3]{-125} = -5$ .

Równanie  $x^2 - 64 = 0$  doprowadzamy do postaci  $(x-8) \cdot (x+8) = 0$ . Przynajmniej jeden z czynników  $x-8$  lub  $x+8$  jest równy 0, czyli  $x = 8$  lub  $x = -8$ .

Równanie  $(x^3 + 125)(x^2 - 64) = 0$  ma trzy rozwiązania rzeczywiste:

$x = -5$ ,  $x = 8$ ,  $x = -8$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- zapisze dwa równania  $x^3 + 125 = 0$  i  $x^2 - 64 = 0$
- lub
- wyznaczy poprawnie (lub poda) rozwiązania jednego z równań:  $x^3 + 125 = 0$  lub  $x^2 - 64 = 0$
- i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania:  $x = -5$ ,  $x = 8$ ,  $x = -8$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający uzyska trafne rozwiązania równania, ale w wyniku błędnej metody, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie uzyska 1 punktu za zapisanie dwóch równań:  $x^3 + 125 = 0$ ,  $x^2 - 64 = 0$ .
3. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pierwiastki wielomianu  $(x^3 + 125)(x^2 - 64)$  i poda niewłaściwą odpowiedź, np.  $x \in \mathbb{R} - \{-8, -5, 8\}$ , to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 28. (0–2)**

|                                |                                                                                                              |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{2}{a+b}.$$

Ponieważ liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie, więc  $a+b > 0$  i  $2ab > 0$ . Mnożąc obie strony nierówności przez  $2ab(a+b)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\geq 4ab, \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab, \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0, \\ (a-b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ , więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

## II sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{a+b}{2ab} - \frac{2}{a+b} \geq 0,$$

$$\frac{(a+b)^2 - 4ab}{2ab(a+b)} \geq 0.$$

Ponieważ liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie, więc  $a+b > 0$  i  $2ab > 0$ . Mnożąc obie strony nierówności przez  $2ab(a+b)$ , otrzymujemy

$$(a+b)^2 - 4ab \geq 0,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ , więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci  $(a+b)^2 \geq 4ab$  lub  $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$ , lub

$\frac{(a+b)^2 - 4ab}{2ab(a+b)} \geq 0$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### Uwagi

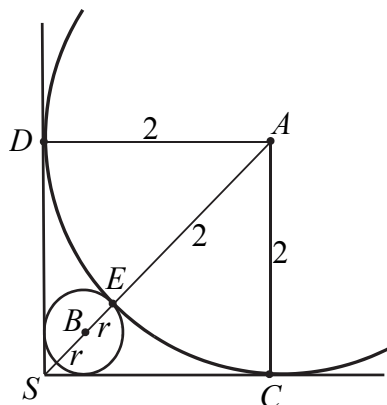
1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości  $a$  i  $b$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający zakończy rozumowanie, zapisując nierówność  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  i nie powoła się na stosowne twierdzenie, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności  $(a-b)^2 \geq 0$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 29. (0–4)**

|                                |                                                                                                      |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 7. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych (7.2). |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy  $|AS| = 2\sqrt{2}$  oraz  $|AE| = 2$ . Zatem

$$|SE| = 2\sqrt{2} - 2.$$

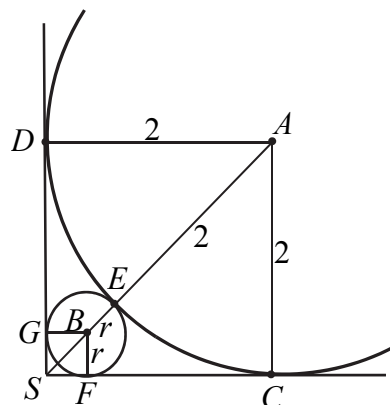
Średnica okręgu o środku  $B$  i promieniu  $r$  jest krótsza od odcinka  $SE$ , więc

$$2r < 2\sqrt{2} - 2, \text{ czyli } r < \sqrt{2} - 1.$$

Co kończy dowód.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy  $|AS| = 2\sqrt{2}$ ,  $|BS| = r\sqrt{2}$  oraz  $|AE| = 2$ .

Ponieważ  $|AS| = |BS| + |BE| + |AE|$ , więc otrzymujemy

$$2\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + 2,$$

$$r(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Stąd mnożąc obie strony tego równania przez  $\sqrt{2}-1$  otrzymujemy

$$r(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1),$$

$$r=2(\sqrt{2}-1)^2,$$

$$r=2(2-2\sqrt{2}+1),$$

$$r=2(3-2\sqrt{2}).$$

Sprawdźmy, czy  $2(3-2\sqrt{2}) < \sqrt{2}-1$ .

Przekształcamy tę nierówność równoważnie.

$$6-4\sqrt{2} < \sqrt{2}-1$$

$$7 < 5\sqrt{2}$$

Ponieważ  $\sqrt{2} \approx 1,41 > 1,4$ , więc  $5\sqrt{2} > 7$ . Oznacza to, że  $r < \sqrt{2}-1$ .

#### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy:

- obliczy  $|SE| = 2\sqrt{2}-2$

albo

- zapisze równość  $2\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + 2$ .

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

#### Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy  $r$  i zapisze wynik w postaci ułamka, w którym

w mianowniku występuje liczba niewymierna, np.  $r = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1}$ , i błędnie szacuje tę liczbę,

np. stosując takie same przybliżenia z niedomiarem  $\sqrt{2}$  w liczniku i w mianowniku, to otrzymuje **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że długość odcinka, którego jednym końcem jest punkt styczności okręgów, a drugim wierzchołek kąta prostego, jest równa długości średnicy mniejszego okręgu i nie wycofa się z tego założenia oraz nie obliczy długości wspomnianego odcinka, to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 30. (0–2)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw (4.14). Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$ , $y = f(x) + a$ , $y = -f(x)$ , $y = f(-x)$ (4.4). |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązanie**

Ponieważ punkt  $P$  leży na wykresie funkcji  $f$ , więc możemy zapisać:

$$9 = a^2, \text{ gdzie } a > 0.$$

Stąd  $a = 3$ .

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej  $f$  jest przedział  $(0, +\infty)$ . Wykres funkcji  $g$  powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji  $f$  o 2 jednostki w dół. Zatem zbiorem wartości funkcji  $g$  jest przedział  $(-2, +\infty)$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**  
gdy:

- obliczy  $a$ :  $a = 3$

albo

- zapisze zbiór wartości funkcji  $g$ :  $(-2, +\infty)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**  
gdy obliczy  $a$ :  $a = 3$  i zapisze zbiór wartości funkcji  $g$ :  $(-2, +\infty)$ .

**Uwaga**

Opis zbioru wartości uznaje się za poprawny, jeśli zbiór ten jest przedstawiony graficznie w sposób jednoznacznie wskazujący, że liczba  $-2$  nie należy do tego zbioru, lub zbiór ten jest opisany słownie, lub jakkolwiek poprawną nierównością.

**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór wartości funkcji w postaci  $(+\infty, -2)$ , to przyznajemy **2 punkty**, o ile obliczy  $a = 3$ .

**Zadanie 31. (0–2)**

|                                |                                                                                                                |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Korzystamy ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na  $a_{12}$ :

$$a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot r.$$

Korzystamy ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na  $S_{12}$ :

$$S_{12} = \frac{2a_1 + (12-1) \cdot r}{2} \cdot 12.$$

Otrzymujemy układ równań

$$30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = 12a_1 + 66r.$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3.$$

II sposób

Korzystamy ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na  $S_{12}$ :

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12.$$

Otrzymujemy równanie

$$162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12.$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3.$$

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi  $a_1$  i  $r$  wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\text{np.: } 30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = \frac{2a_1 + 11 \cdot r}{2} \cdot 12$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą  $a_1$  wynikające z zastosowania poprawnego wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego bez wykorzystywania różnicy ciągu:

$$\text{np.: } 162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą  $a_1$  i obliczy pierwszy wyraz ciągu:  $a_1 = -3$ .

#### Uwagi

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 12 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że  $a_1 = -3$ , to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że  $a_1 = -3$ , ale nie zapisze wszystkich 12 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko  $a_1 = -3$  lub  $a_1 = -3$  i  $r = 3$ , to otrzymuje **0 punktów**.

#### Zadanie 32. (0–5)

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (8.1). Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4). |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### Przykładowe rozwiązania

##### I sposób – proste prostopadłe

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$

$$a_{AB} = \frac{1}{3}.$$

Ponieważ kąt prosty w trójkącie  $ABC$  jest przy wierzchołku  $B$ , więc wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej  $AB$  i przechodzącej przez punkt  $B$

$$y = -3x + 35.$$

Obliczamy współrzędne punktu  $C$ , który jest punktem wspólnym prostych określonych równaniami  $y = 2x + 3$  i  $y = -3x + 35$ :

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x + 35 \end{cases}$$

Stąd po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy parę  $x = \frac{32}{5}$  i  $y = \frac{79}{5}$ .

Zatem punkt  $C$  ma współrzędne  $\left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$

##### II sposób – twierdzenie Pitagorasa

Ponieważ wierzchołek  $C$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  leży na prostej o równaniu  $y = 2x + 3$ , więc jego współrzędne zapisujemy następująco

$$C = (x, 2x + 3).$$

Punkt  $B$  jest wierzchołkiem kąta prostego, zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2.$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$  otrzymujemy równanie

$$(x - 4)^2 + (2x + 3 - 3)^2 = (10 - 4)^2 + (5 - 3)^2 + (x - 10)^2 + (2x + 3 - 5)^2,$$

czyli równanie

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 = 36 + 4 + x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 8x + 4.$$

Zatem

$$20x = 128 \text{ i dalej } x = \frac{32}{5}.$$

Jeśli  $x = \frac{32}{5}$ , to  $y = \frac{79}{5}$ . Zatem  $C = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$ .

### III sposób – iloczyn skalarny

Wektory niezerowe są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy 0. W tym przypadku oznacza to, że iloczyn skalarny wektorów  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{BC}$  jest równy 0.

Współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$  są równe  $\overrightarrow{AB} = [6, 2]$ .

Punkt  $C$  ma współrzędne równe  $C = (x, 2x + 3)$ , więc współrzędne wektora  $\overrightarrow{BC}$  są równe

$$\overrightarrow{BC} = [x - 10, 2x + 3 - 5].$$

Z warunku  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$  otrzymujemy równanie

$$6(x - 10) + 2(2x - 2) = 0,$$

$$3x - 30 + 2x - 2 = 0,$$

$$x = \frac{32}{5}.$$

Zatem  $C = \left(\frac{32}{5}, 2 \cdot \frac{32}{5} + 3\right) = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$ .

### **Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający

- uzależni obie współrzędne punktu  $C$  od jednej zmiennej,

$$\text{np.: } C = (x, 2x + 3) \text{ lub } C = \left(\frac{y-3}{2}, y\right)$$

albo

- zapisze równość  $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$  i obliczy długość  $AB$ :  $|AB| = 2\sqrt{10}$ ,

albo

- zapisze równość  $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$  i zapisze jedną z długości  $|AC|$  lub  $|BC|$  w zależności od współrzędnych punktu  $C$ ,

albo

- obliczy współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AB} = [6, 2]$  i zapisze, że  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora  $\overrightarrow{BC}$  w zależności od współrzędnych punktu  $C$ :  
 $\overrightarrow{BC} = [x-10, y-5]$  i zapisze, że  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora  $\overrightarrow{BC}$  w zależności od jednej współrzędnej punktu  $C$ ,  
 np.:  $\overrightarrow{BC} = [x-10, 2x+3-5]$ ,

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy równania prostej  $AB$ :

$$a_{AB} = \frac{1}{3}$$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej  $AB$   
 i przechodzącej przez punkt  $B$ :  $a_{BC} = -3$

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np.:  
 $\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(10-4)^2 + (5-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}\right)^2$ ,

albo

- obliczy współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AB} = [6, 2]$ , wyznaczy współrzędne wektora  $\overrightarrow{BC}$   
 w zależności od jednej współrzędnej punktu  $C$ , np.:  $\overrightarrow{BC} = [x-10, 2x+3-5]$  i zapisze,  
 że  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ,

albo

- zapisze równość wynikającą z warunku  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ , w której niewiadomymi są dwie  
 współrzędne punktu  $C$ , np.:  $6(x-10) + 2(y-5) = 0$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, która jest współrzędną punktu  $C$ , np.:

$$2x+3 = -3(x-10)+5$$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający

- obliczy  $x = \frac{32}{5}$  albo  $y = \frac{79}{5}$  i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy

albo

- obliczy obie współrzędne punktu  $C$  z błędami rachunkowymi.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy i zapisze współrzędne punktu  $C = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **4 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, ale popełnia błąd, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i:
  - a) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczaniu współczynnika  $a_{AB}$ , np.  $\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$  zamiast  $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - b) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczaniu równania prostej  $BC$ , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - c) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd, polegający na tym, że zdający zapisze błędną równość:  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - d) w I sposobie rozwiązania przyjmie, że kąt prosty jest przy wierzchołku  $A$ , to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - e) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy podstawieniu do wzoru na odległość punktów, nawet trzykrotnie powtórzony, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - f) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest zamiana miejscami współrzędnych punktu  $C$  w początkowym etapie rozwiązania, np.:  $C = (2x + 3, x)$ , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - g) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest przyjęcie bez obliczeń błędnego współczynnika  $b$  w równaniu prostej  $BC$  (np.  $\frac{5}{3}$ ), to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający realizuje pełną strategię rozwiązania, ale popełnia błąd merytoryczny, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i tym jedynym błędem merytorycznym jest błąd, polegający na zastosowaniu nieistniejącego wzoru „ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ”, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na tym, że zapisuje błędną równość:  $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$ , to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu  $y = 2x + 3$ , to za rozwiązanie zadania otrzymuje **0 punktów**, o ile w rozwiązaniu nie występują inne zapisy wymienione w schemacie oceniania, za które należy przyznać zdającemu punkty, np.:  $C = (x, 2x + 3)$ .
6. Jeżeli oprócz poprawnego rozwiązania (kąt prosty przy wierzchołku  $B$ ) zdający podaje inne rozwiązanie (np. kąt prosty przy wierzchołku  $A$ ), którego nie odrzuca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
7. Jeżeli zdający zapisze równanie prostej  $AB$  w postaci ogólnej (np. dokona właściwego podstawienia współrzędnych punktów do równania prostej przechodzącej przez 2 punkty) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 33. (0–2)**

|                                |                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3). |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para  $(x, y)$ , gdzie  $x \in A$  i  $y \in B$ . Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać:

$$\Omega = \{(100,10), (100,11), (100,12), (100,13), (100,14), (100,15), (100,16), \\ (200,10), (200,11), (200,12), (200,13), (200,14), (200,15), (200,16), \\ (300,10), (300,11), (300,12), (300,13), (300,14), (300,15), (300,16), \\ (400,10), (400,11), (400,12), (400,13), (400,14), (400,15), (400,16), \\ (500,10), (500,11), (500,12), (500,13), (500,14), (500,15), (500,16), \\ (600,10), (600,11), (600,12), (600,13), (600,14), (600,15), (600,16), \\ (700,10), (700,11), (700,12), (700,13), (700,14), (700,15), (700,16)\}.$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Z cechy podzielności liczby całkowitej przez 3 wynika, że suma cyfr otrzymanej liczby  $x + y$  musi być podzielna przez 3. Zbiór  $A$  ma postać:

$$A = \{(100,11), (100,14), (200,10), (200,13), (200,16), \\ (300,12), (300,15), (400,11), (400,14), (500,10), \\ (500,13), (500,16), (600,12), (600,15), (700,11), (700,14)\}.$$

Zdarzeniu  $A$  sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli  $|A| = 16$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe  $\frac{16}{49}$ .

### Uwaga

Zdający może zapisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jako zbiór sum możliwych do utworzenia w wyniku losowania, tzn. może zastosować zapis:

$$\Omega = \{110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, \\ 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, \\ 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, \\ 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, \\ 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, \\ 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, \\ 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716\}.$$

Wtedy zbiór

$$A = \{111, 114, 210, 213, 216, 312, 315, 411, 414, 510, 513, 516, 612, 615, 711, 714\}.$$

### II sposób

Rysujemy tabelę, która przedstawia model rozważanego doświadczenia.

|    | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 10 |     | ×   |     |     | ×   |     |     |
| 11 | ×   |     |     | ×   |     |     | ×   |
| 12 |     |     | ×   |     |     | ×   |     |
| 13 |     | ×   |     |     | ×   |     |     |
| 14 | ×   |     |     | ×   |     |     | ×   |
| 15 |     |     | ×   |     |     | ×   |     |
| 16 |     | ×   |     |     | ×   |     |     |

Zdarzeniom elementarnym odpowiadają komórki tej tabeli. Jest ich 49, zatem  $|\Omega| = 49$ .

Symbolem **×** zaznaczamy te zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu  $A$ , polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.

Zdarzeniu  $A$  sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli  $|A| = 16$ .

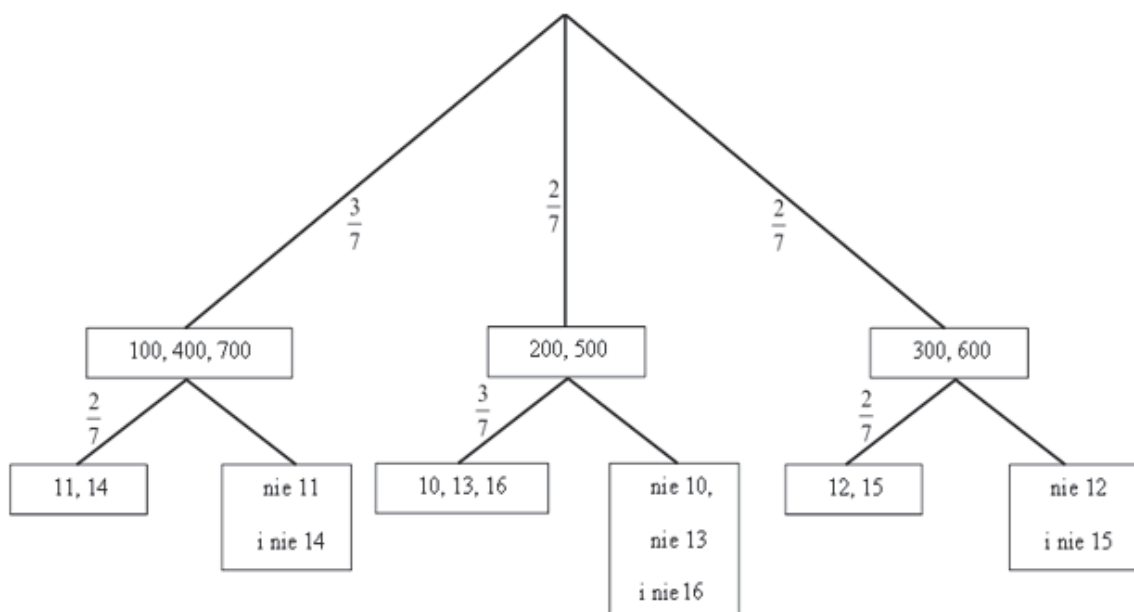
Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe  $\frac{16}{49}$ .

### III sposób

Rysujemy drzewko rozważanego doświadczenia.



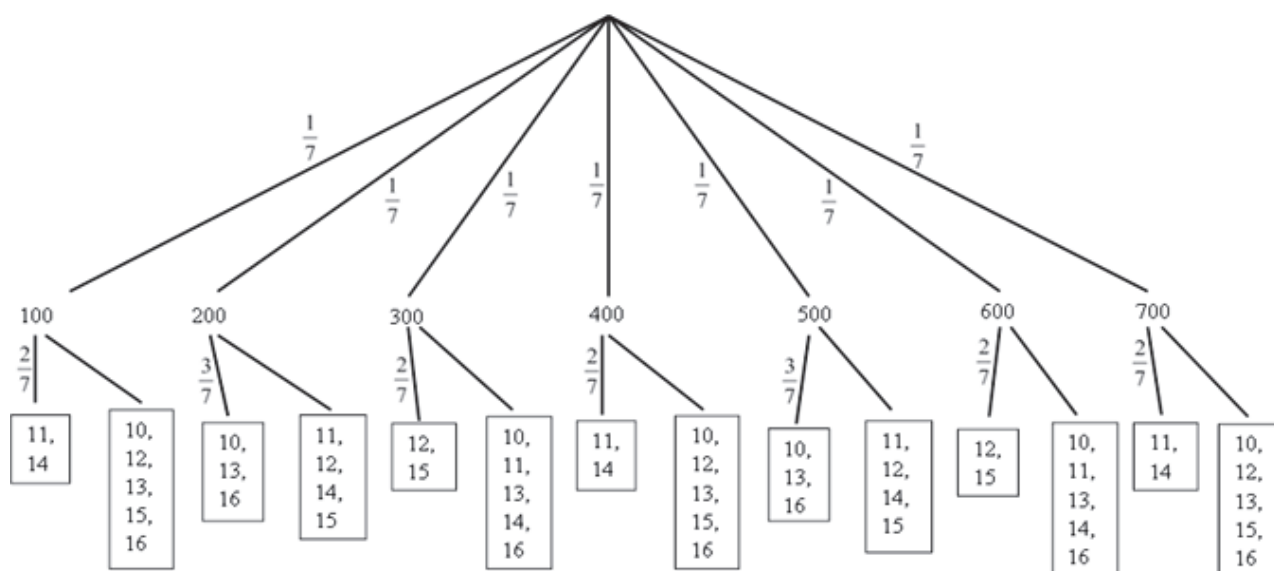
Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe  $\frac{16}{49}$ .

#### Uwaga

Zdający może narysować drzewo probabilistyczne, w którym na każdym z etapów lub na jednym z etapów rozważa każdą możliwą do wylosowania liczbę oddzielnie. Przykład takiego drzewa znajduje się poniżej.



Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  może być obliczone w następujący sposób:

$$P(A) = 5 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{49}.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$

albo

- zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,

albo

- poda sposób obliczania  $|A|$ , np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 oraz wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  i nie zaliczy do zbioru  $A$  niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia:
  1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi
  - albo
  2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzielną przez 3

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$

albo

- zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$  i zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,

albo

- zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$  i poda sposób obliczania  $|A|$ , np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3, wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , ale nie zaliczy do zbioru  $A$  niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami oraz zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$ ,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia:
  1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów

albo

2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzieloną przez 3 i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów;

albo

- narysuje drzewko doświadczenia, w którym wskaże wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu  $A$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający

- zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$  oraz zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , ale nie zaliczy do zbioru  $A$  niewłaściwego zdarzenia elementarnego

albo

- zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$  oraz zapisze, że  $|A| = 16$  i przedstawi sposób obliczenia tej liczby, np. zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3 i wskaże w dowolny sposób przykładowe zdarzenie elementarne lub przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 i wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , ale nie zaliczy do zbioru  $A$  niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi (np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami), zapisze  $|\Omega| = 7 \cdot 7$ , oraz zaznaczy 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  i żadnych innych zdarzeń elementarnych nie zaliczy do  $A$ ,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia, w którym wystąpią wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu  $A$  wraz z prawdopodobieństwami oraz poprawnie zastosuje regułę drzewka do obliczenia prawdopodobieństwa  $P(A)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

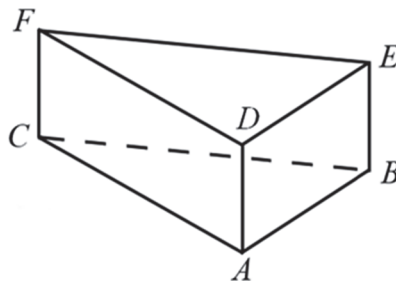
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 17 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , w tym 16 poprawnych i jedno niepoprawne oraz otrzyma prawdopodobieństwo równe  $\frac{17}{49}$ , to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 15 poprawnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  i otrzyma prawdopodobieństwo równe  $\frac{15}{49}$ , to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przyjmie błędną liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i nie jest to efekt błędu rachunkowego, np. przyjmie  $|\Omega| = 7 \cdot 6$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze jedynie  $|\Omega| = 7 \cdot 7$ ,  $|A| = 16$  i nie przedstawi czytelnego uzasadnienia liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , i obliczy  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$ , to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze  $|\Omega| = 7 \cdot 7$ ,  $|A| = 16$  oraz zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3, ale w przedstawionym rozwiązaniu nie można zidentyfikować żadnego zdarzenia elementarnego, które zdający powinien rozważać, to otrzymuje **2 punkty**, nawet jeśli w rozwiązaniu występuje poprawny wynik końcowy.
7. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , w tym 15 poprawnych i jedno niewłaściwe i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

#### Zadanie 34. (0–4)

|                                   |                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastoslupa prostego (G11.2).<br>3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4). |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Rozważany graniastosłup ma 5 ścian, a każda z nich ma takie samo pole. Obliczamy pole podstawy, a zarazem pole jednej ściany bocznej:

$$45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}.$$

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, więc jego pole jest równe

$$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3},$$

$$a = 6.$$

Ściana boczna jest prostokątem o bokach długości  $a$  i  $h$ , więc pole każdej ściany bocznej jest równe

$$P_{ABED} = ah.$$

Z warunków zadania wynika, że:

$$ah = 9\sqrt{3}.$$

Znamy długość krawędzi podstawy  $a$ , zatem:

$$6h = 9\sqrt{3}.$$

Obliczamy wysokość graniastoslupa

$$h = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Objętość graniastoslupa jest równa

$$V = P_{ABC} \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{81}{2}.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający

- zapisze zależność między wielkościami  $a$  i  $h$  wynikającą z równości pól podstawy i ściany bocznej graniastoslupa:  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = ah$

albo

- obliczy pole jednej ściany graniastoslupa:  $45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}$ ,

albo

- zapisze równanie:  $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah = 45\sqrt{3}$

albo

- zapisze równania:  $2 \cdot \frac{1}{2}ah_p + 3ah = 45\sqrt{3}$  i  $\frac{1}{2}ah_p = ah$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, pozwalające na wyznaczenie długości krawędzi podstawy lub wysokości graniastoslupa i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- uzależni objętość bryły od jednej zmiennej

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa:  $a = 6$ ,  $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa:  $a = 6$  i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej  $a$  lub obliczy wysokość graniastosłupa  $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$  i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej  $h$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy objętość graniastosłupa:  $V = \frac{81}{2}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na niepoprawnym stosowaniu wzoru na pole trójkąta równobocznego albo wzoru na pole prostokąta, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem ściany bocznej i w efekcie rozważa jeden z trzech przypadków:  $2P_p = P_{sb}$ ,  $P_p = 3P_{sb}$ ,  $2P_p = 3P_{sb}$ , albo błąd, polegający na przyjęciu, że graniastosłup ma trzy ściany boczne i jedną podstawę, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwagach 2. lub 3., a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający popełnia inne niż wymienione w uwagach 2. lub 3. błędy, dotyczące pól ścian bryły, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający rozważa graniastosłup trójkątny, który nie jest prawidłowy, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.