



**CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA**

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017**

**FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

MAJ 2017

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki, w tym pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych (1.a).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	Wersja I	Wersja II
		A	D

Zadanie 4. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 5. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 6. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający oblicza wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej (2.e).	Wersja I	Wersja II
		D	C

Zadanie 7. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej (1.e).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 8. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).	Wersja I	Wersja II
		C	A

Zadanie 9. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych (1.a)	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 10. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej (4.i).	Wersja I	Wersja II
		C	A

Zadanie 11. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym (4.n).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 12. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 13. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 14. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (6.c).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 15. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 16. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).	Wersja I	Wersja II
		B	A

Zadanie 17. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 18. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 19. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątność prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 20. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej (8.e).	Wersja I	Wersja II
		A	C

Zadanie 21. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach (9.b).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 22. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 23. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji..	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych (9.b).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 24. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 25. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).
--	---

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego $8x^2 - 72x$.

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $8x^2 - 72x$:

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ lub zaznaczając pierwiastki trójmianu na wykresie

albo

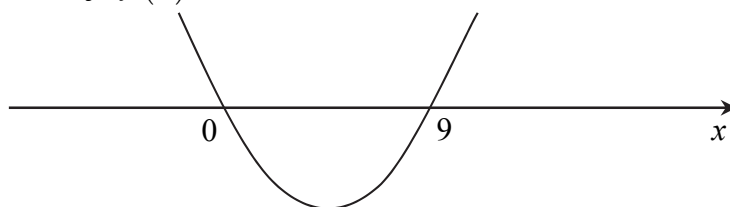
- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:

$$\Delta = 72^2, \quad x_1 = \frac{72 - 72}{16} = 0, \quad x_2 = \frac{72 + 72}{16} = 9.$$

Drugi etap rozwiązania polega na wyznaczeniu zbioru rozwiązań nierówności $8x^2 - 72x \leq 0$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $0 \leq x \leq 9$ lub $\langle 0, 9 \rangle$ lub $x \in \langle 0, 9 \rangle$ np. odczytując go

ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = 8x^2 - 72x$.



Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 8x^2 - 72x$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd

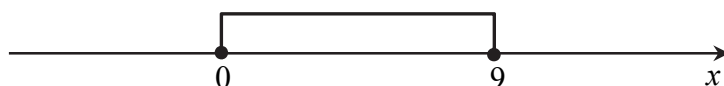
rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $0 \leq x \leq 9$ lub $\langle 0, 9 \rangle$ lub $x \in \langle 0, 9 \rangle$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez x , bez podania stosownych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający wyznacza ujemną deltę trójmianu kwadratowego, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$ i zapisze, np. $x \in \langle -9, 0 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 9, 0 \rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązanie

Wylączamy wspólny czynnik przed nawias $4^{2017}(1+4+4^2+4^3)$. Doprowadzamy liczbę do postaci $4^{2017} \cdot 5 \cdot 17$. Wnioskujemy, że dana liczba jest podzielna przez 17.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy zapisze liczbę $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą 4^k , gdzie $1985 \leq k \leq 2017$, np. $4^{2017}(1+4+4^2+4^3)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

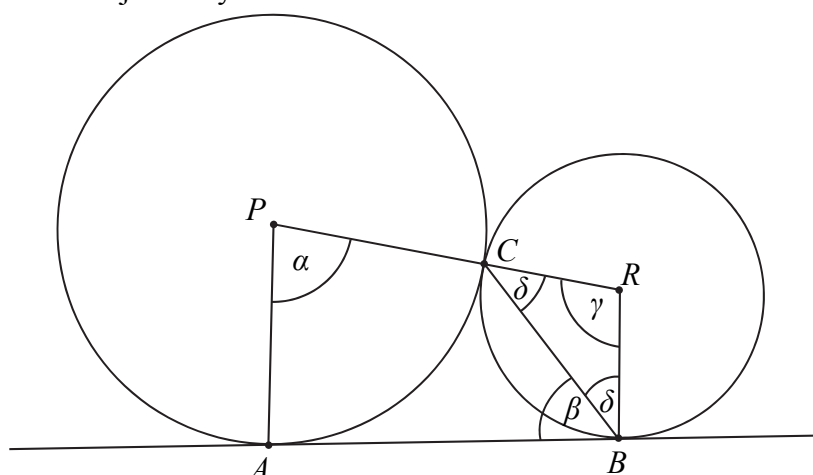
Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi poprawny dowód.

Zadanie 28. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R , więc $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$. Stąd

$$\delta = |\sphericalangle CBR| = 90^\circ - \beta.$$

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90^\circ - \beta.$$

Zatem

$$|\sphericalangle BRC| = \gamma = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta.$$

Suma miar kątów czworokąta $ABRP$ jest równa 360° , $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$, więc

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BRP| + |\sphericalangle RPA| = 360^\circ,$$

czyli

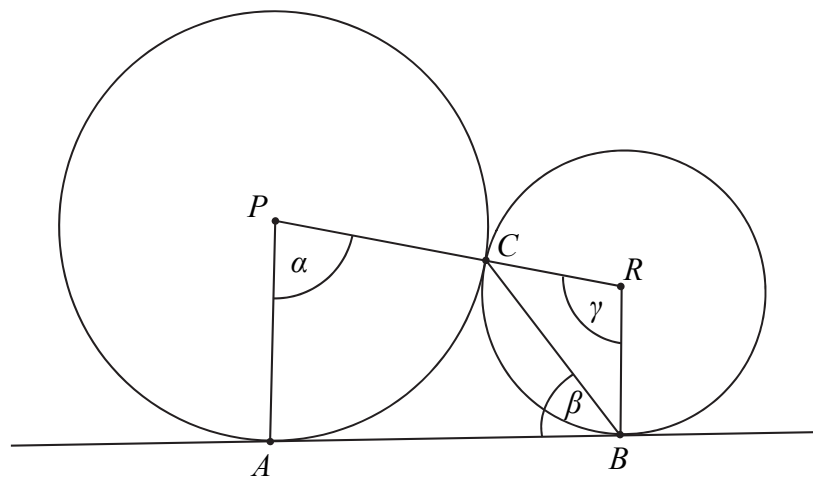
$$90^\circ + 90^\circ + 2\beta + \alpha = 360^\circ,$$

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta.$$

To kończy dowód.

II sposób



Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że $|\sphericalangle BRC| = \gamma = 2\beta$.

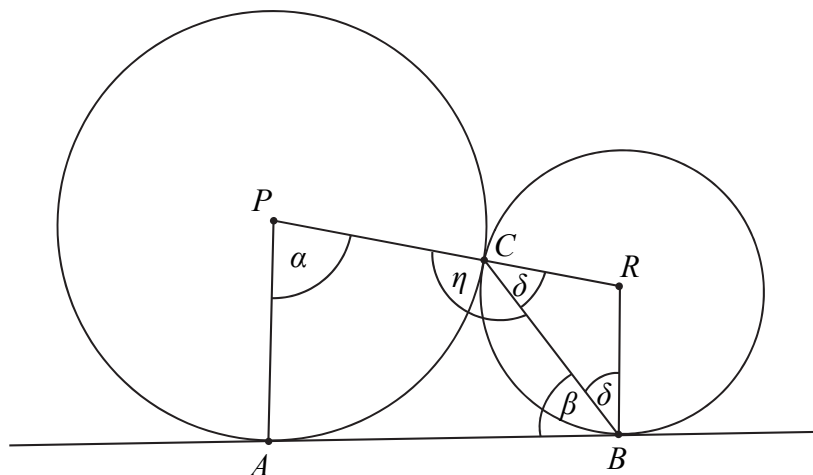
Ponieważ $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$ i $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$, więc czworokąt $ABRP$ jest trapezem o podstawach AP i BR . Suma miar kątów przy ramieniu trapezu jest równa 180° , więc

$$\alpha + \gamma = 180^\circ,$$

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Stąd $\alpha = 180^\circ - 2\beta$. To kończy dowód.

III sposób



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R , więc $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$. Stąd

$$\delta = 90^\circ - \beta.$$

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90^\circ - \beta.$$

Kąty BCR i PCB są przyległe, więc

$$\eta = 180^\circ - |\sphericalangle BCR| = 180^\circ - (90^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta.$$

Suma miar kątów czworokąta $ABCP$ jest równa 360° , $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$, więc

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle CPA| = 360^\circ,$$

czyli

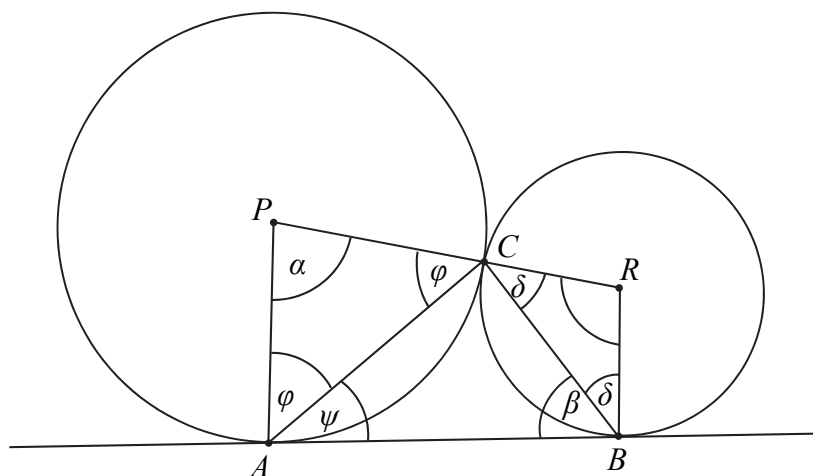
$$90^\circ + \beta + \eta + \alpha = 360^\circ,$$

$$90^\circ + \beta + (90^\circ + \beta) + \alpha = 360^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta.$$

To kończy dowód.

IV sposób



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R , więc $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$.

Stąd $\delta = 90^\circ - \beta$.

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90^\circ - \beta.$$

Trójkąt PAC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA| = \varphi = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Prosta AB jest styczna w punkcie A do okręgu o środku P , więc $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$. Stąd

$$|\sphericalangle CAB| = \psi = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Miara kąta ACB w trójkącie ABC jest równa

$$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - \beta - \psi = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}.$$

Suma miar kątów PCA , ACB i BCR jest równa 180° , więc

$$|\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCR| = 180^\circ,$$

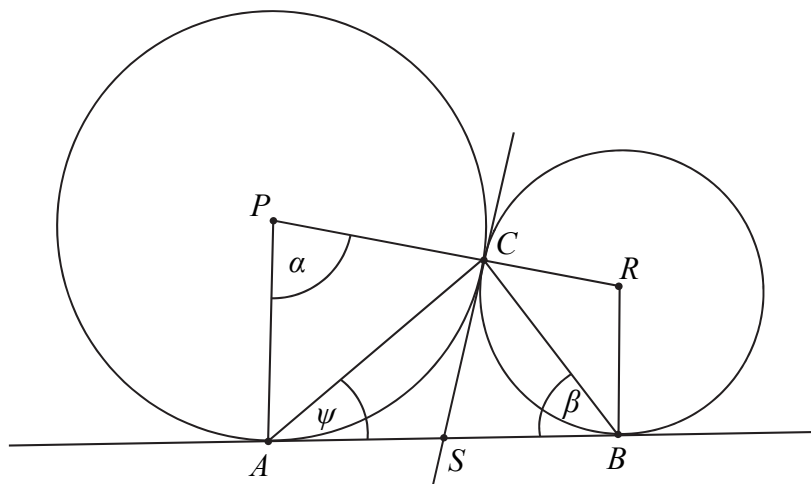
$$\varphi + \left(180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) + \delta = 180^\circ,$$

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \left(180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) + 90^\circ - \beta = 180^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta.$$

To kończy dowód.

V sposób



Poprowadźmy przez punkt C wspólną styczną do obu okręgów. Niech S oznacza punkt jej przecięcia z prostą AB .

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że

$$\psi = \frac{\alpha}{2}.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|AS| = |CS| = |BS|$. Stąd wynika, że S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Odcinek AB jest średnicą tego okręgu, więc trójkąt ABC jest prostokątny. Suma miar jego kątów ostrych jest równa 90° , czyli

$$\beta + \psi = 90^\circ.$$

$$\beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze układ warunków wystarczający do udowodnienia równości $\alpha = 180^\circ - 2\beta$, np.:

- $\delta = 90^\circ - \beta$ i $2\delta + \gamma = 180^\circ$ i $\alpha + \gamma + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

lub

- $\gamma = 2\beta$ i $\alpha + \gamma = 180^\circ$,

lub

- $\delta = 90^\circ - \beta$ i $\eta = 180^\circ - \delta$ i $90^\circ + \beta + \eta + \alpha = 360^\circ$,

lub

- $\delta = 90^\circ - \beta$ i $\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ i $\psi = 90^\circ - \varphi$ i $180^\circ - (\beta + \psi) = 180^\circ - (\varphi + \delta)$,

lub

- $\beta + \psi = 90^\circ$ i $\psi = \frac{\alpha}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.

4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej (4.i).

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Ponieważ $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$, stąd wartość $p = \frac{-6+0}{2} = -3$.

Zatem $f(x) = a(x-p)^2 + q$ dla $p = -3$ i $q = 6$.

Obliczamy współczynnik a . Wiemy, że $f(0) = \frac{3}{2}$, zatem

$$a(0+3)^2 + 6 = \frac{3}{2},$$

$$9a = -\frac{9}{2},$$

$$a = -\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $a = -\frac{1}{2}$.

II sposób

Z treści zadania wynika, że $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} a(-6)^2 + b(-6) + c = \frac{3}{2} \\ a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = \frac{3}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} 36a - 6b + c = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} b = 6a \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka:

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{6a}{2a} = -3.$$

Stąd wynika, że $f(-3) = 6$ i $f(x) = ax^2 + 6ax + \frac{3}{2}$. Obliczamy współczynnik a

$$a(-3)^2 + 6a \cdot (-3) + \frac{3}{2} = 6,$$

$$-9a = \frac{9}{2},$$

$$a = -\frac{1}{2}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka: np. $p = \frac{-6+0}{2} = -3$

albo

- zapisze układ dwóch równań, np.:
$$\begin{cases} a(-6)^2 + b(-6) + c = \frac{3}{2} \\ a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

albo

- zapisze wzór funkcji f w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ oraz zapisze $q = 6$,

albo

- zapisze równanie $-\frac{\Delta}{4a} = 6$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający

- zapisze wzór funkcji f w postaci: $f(x) = a(x+3)^2 + 6$

albo

- zapisze układ trzech równań z niewiadomymi a, b, c , np.:

$$\begin{cases} a(-6)^2 + b(-6) + c = \frac{3}{2} \\ a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = \frac{3}{2} \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a(-6)^2 + b(-6) + c = \frac{3}{2} \\ a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = \frac{3}{2} \\ a(-3)^2 + b(-3) + c = 6 \end{cases}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą a ,
np.: $a(0+3)^2 + 6 = \frac{3}{2}$ lub $a(-3)^2 + 6a \cdot (-3) + \frac{3}{2} = 6$, lub $36a^2 + 18a = 0$

albo

- obliczy wartości b i c : $b = -3$, $c = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy wartość współczynnika a : $a = -\frac{1}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający w przedstawionym rozwiązaniu traktuje liczby -6 i 0 jako miejsca zerowe rozważanej przez siebie funkcji i przyjmuje, że druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa $4\frac{1}{2}$, to może otrzymać **4 punkty**, o ile w rozwiązaniu nie występują błędy.
2. Jeżeli zdający w przedstawionym rozwiązaniu traktuje liczby -6 i 0 jako miejsca zerowe rozważanej przez siebie funkcji i przyjmuje, że druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa 6 , to może otrzymać **1 punkt**, o ile poprawnie wyznaczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

Zadanie 30. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.

7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy długość krótszej przyprostokątnej przez x . Wtedy dłuższa przyprostokątna ma długość $x+14$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$\begin{aligned}x^2 + (x+14)^2 &= 26^2, \\x^2 + x^2 + 28x + 196 &= 676, \\x^2 + 14x - 240 &= 0\end{aligned}$$

Stąd

$$x = 10 \text{ lub } x = -24.$$

Drugie z rozwiązań odrzucamy, zatem długości boków trójkąta są równe: 10, 24, i 26, więc obwód jest równy 60 cm.

Schemat punktowania**Zdający otrzymuje 1 p.**

gdy:

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.: $x^2 + (x+14)^2 = 26^2$, gdzie x jest długością krótszej przyprostokątnej

albo

- zapisze układ równań, np.: $a^2 + b^2 = 26^2$ i $b = a + 14$, gdzie a jest długością krótszej oraz b długością dłuższej przyprostokątnej

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy obwód trójkąta: 60 cm.

Uwagi

1. Jeżeli zdający jedynie poda długości boków trójkąta: 10, 24, 26 i jego obwód: 60, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poda długości boków trójkąta: 10, 24, 26 i jego obwód: 60 oraz uzasadni, że rozważany trójkąt jest prostokątny, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający podaje w rozwiązaniu tylko liczby 10, 24, 26, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Wyznaczamy różnicę r ciągu arytmetycznego.

W tym celu stosujemy wzory na sumę częściową $S_3 = 3a_1 + 3r = 33$ i $a_1 = 8$ lub zapisujemy równanie $a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 33$.

Obliczamy r : $r = 3$.

Następnie obliczamy różnicę $a_{16} - a_{13}$, jako $3r$ lub po wyznaczeniu a_{16} i a_{13} , czyli

$$a_{16} = 8 + 15 \cdot 3 = 53, \quad a_{13} = 8 + 12 \cdot 3 = 44.$$

$$\text{Zatem } a_{16} - a_{13} = 3r = 9.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy obliczy różnicę ciągu $r = 3$ (lub $3r = 9$) lub obliczy wartość $a_1 + r = 11$, lub obliczy wartość $a_2 = 11$, lub zapisze, że $a_{16} - a_{13} = 3r$, lub obliczy $a_3 = 14$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy różnicę $a_{16} - a_{13} = 9$.

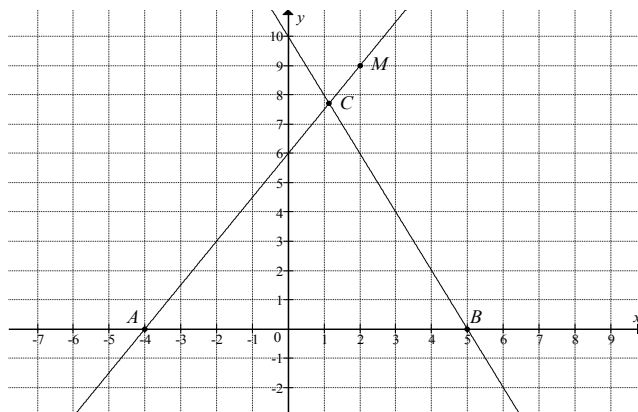
Uwagi

1. Jeśli zdający przyjmuje $n = 33$ lub $a_3 = 33$ i nie przedstawia poprawnej metody obliczenia różnicy $a_{16} - a_{13}$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda wartość $r = 3$ i zapisze $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zamiast ciągu arytmetycznego rozważa ciąg geometryczny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 32. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.

8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym oraz interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.b, 8.d).

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Prosta AM przechodzi przez punkty $A = (-4, 0)$ i $M = (2, 9)$, więc jej równanie ma postać

$$y = \frac{9}{2+4}(x+4), \text{ czyli } y = \frac{3}{2}x + 6.$$

Prosta k o równaniu $y = -2x + 10$ przecina oś Ox w punkcie B , więc $B = (5, 0)$.

Zatem $|AB| = |5 - (-4)| = 9$.

Współrzędne punktu C obliczymy, rozwiązując układ równań:

$$y = \frac{3}{2}x + 6 \text{ i } y = -2x + 10.$$

Stąd

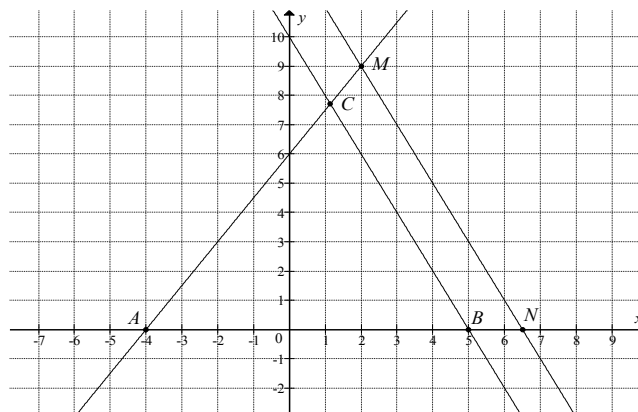
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 6 &= -2x + 10, \\ \frac{7}{2}x &= 4, \\ x &= \frac{8}{7}, \text{ a } y = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{7} + 6 = \frac{12}{7} + 6 = \frac{54}{7} \end{aligned}$$

Zatem $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$. Wynika stąd, że wysokość h trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C

na podstawę AB jest równa $h = y_C = \frac{54}{7}$.

Zatem pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{54}{7} = \frac{243}{7} = 34 \frac{5}{7}.$$

II sposób

Wyznaczamy równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt $M = (2, 9)$:

$$y = -2(x - 2) + 9,$$

$$y = -2x + 13.$$

Niech N będzie punktem przecięcia prostej l z osią Ox , więc $N = (\frac{13}{2}, 0)$. Zatem

$$|AN| = \left| \frac{13}{2} - (-4) \right| = \frac{21}{2}.$$

Prosta k o równaniu $y = -2x + 10$ przecina oś Ox w punkcie B , więc $B = (5, 0)$.

Zatem $|AB| = |5 - (-4)| = 9$.

Z równoległości prostych k i l wynika, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta ANM , a skala tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|AB|}{|AN|} = \frac{9}{\frac{21}{2}} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}.$$

Pole trójkąta ANM jest równe

$$P_{ANM} = \frac{1}{2} |AN| \cdot 9 = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9 = \frac{21 \cdot 9}{4},$$

więc pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM} = \left(\frac{6}{7} \right)^2 \cdot \frac{21 \cdot 9}{4} = \frac{243}{7} = 34 \frac{5}{7}.$$

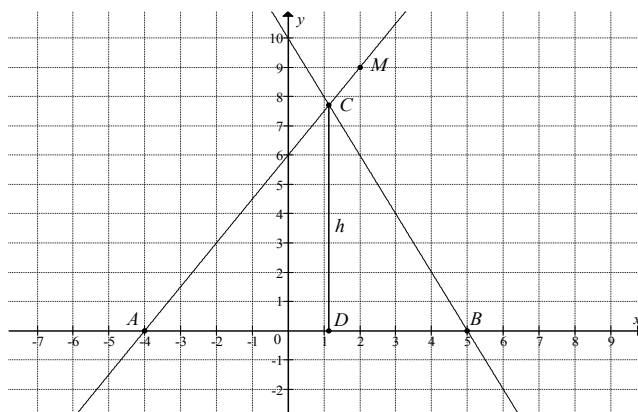
Uwaga

Mając obliczone współrzędne wierzchołków trójkąta, możemy obliczyć jego pole, korzystając

ze wzoru $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| (5 + 4) \left(\frac{54}{7} - 0 \right) - 0 \cdot \left(\frac{8}{7} + 4 \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 9 \cdot \frac{54}{7} \right| = \frac{243}{7} = 34 \frac{5}{7}.$$

III sposób



Prosta k o równaniu $y = -2x + 10$ przecina oś Ox w punkcie B , więc $B = (5, 0)$.

Zatem $|AB| = |5 - (-4)| = 9$.

Niech $h = |CD|$. Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej k jest równy -2 , więc

$$|DA| = \frac{1}{2}h.$$

Zatem $|AD| = 9 - \frac{1}{2}h$.

Współczynnik kierunkowy prostej AM jest równy $a_{AM} = \frac{9-0}{2-(-4)} = \frac{3}{2}$, ale $a_{AM} = \frac{|CD|}{|AD|}$, więc

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{h}{9 - \frac{1}{2}h} = \frac{3}{2},$$

$$2h = 27 - \frac{3}{2}h,$$

$$\frac{7}{2}h = 27,$$

$$h = \frac{54}{7}.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{54}{7} = \frac{243}{7} = 34\frac{5}{7}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej AM : $a = \frac{3}{2}$

albo

- wyznaczy współrzędne punktu B : $B = (5, 0)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający

- zapisze równanie prostej AM : $y = \frac{3}{2}x + 6$

albo

- wyznaczy równanie prostej MN : $y = -2x + 13$ i zapisze, że trójkąty ABC i ANM są podobne,

albo

- zapisze zależność między długościami odcinków CD i DA : $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- obliczy długość podstawy AB trójkąta: $|AB| = 9$ oraz zapisze równanie, z którego można wyznaczyć jedną ze współrzędnych punktu C

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka C : $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$ (lub drugą współrzędną tego punktu)

i nie zapisze współrzędnych punktu B ,

albo

- obliczy skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta ANM : $s = \frac{6}{7}$ (lub skalę podobieństwa trójkąta ANM do trójkąta ABC : $s_1 = \frac{7}{6}$),

albo

- obliczy pole trójkąta ANM : $P_{ANM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9$ i zapisze, że $P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM}$, gdzie s oznacza skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta ANM ,

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, z którego można obliczyć wysokość trójkąta ABC , np.: $\frac{h}{9 - \frac{1}{2}h} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający

- obliczy drugą współrzędną wierzchołka C oraz długość podstawy AB trójkąta ABC :

$$y_C = \frac{54}{7}, |AB| = 9$$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołków B i C : $B = (5, 0)$, $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$,

albo

- obliczy skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta ANM : $s = \frac{6}{7}$ (lub skalę podobieństwa trójkąta ANM do trójkąta ABC : $s_1 = \frac{7}{6}$) oraz pole trójkąta ANM :

$$P_{ANM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9 \text{ i zapisze, że } P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM},$$

albo

- obliczy wysokość CD trójkąta ABC : $h = \frac{54}{7}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.Zdający obliczy pole trójkąta ABC : $P_{ABC} = \frac{243}{7}$.**Uwaga**

Akceptujemy, jeżeli zdający poda pole trójkąta w przybliżeniu, np. 34,714.

Zadanie 33. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń. (10.d).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązanieJest to model klasyczny i liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 90$.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to zbiór wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne

$$A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}.$$

Stąd $|A| = 10$.Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3, jest równe $\frac{1}{9}$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy

- zapisze, że $|\Omega| = 90$

albo

- zapisze, że $|A| = 10$ i nie wskazuje przy tym niepoprawnych zdarzeń elementarnych

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A :
12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A i wynik zapisze w postaci ułamka:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Uwaga

1. Jeżeli zdający błędnie zapisze wynik $P(A)$ jako liczbę większą od 1 lub mniejszą od 0, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli w przedstawionym rozwiązaniu zdający interpretuje zdarzenie elementarne jako rezultat wylosowania więcej niż jednej liczby, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu zapisze tylko $\frac{1}{9}$, to otrzymuje **0 punktów**.

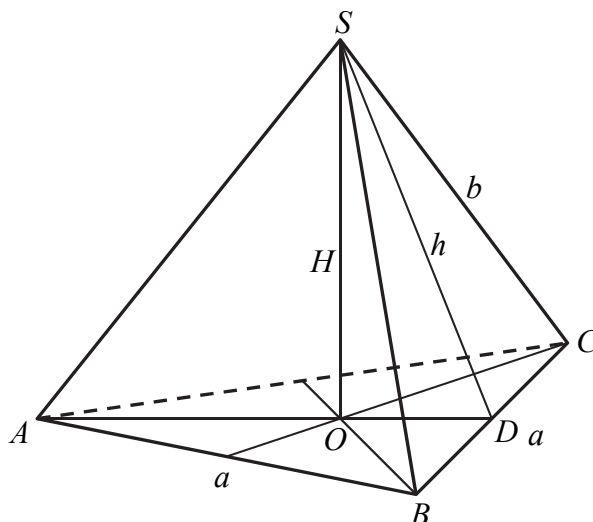
Zadanie 34. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.

9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wykorzystujemy wzór na pole powierzchni bocznej ostrosłupa i zapisujemy równanie

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}, \text{ skąd otrzymujemy } a = 2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DOS otrzymujemy

$$H^2 = h^2 - |DO|^2.$$

Ponieważ $|DO| = \frac{1}{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc

$$H^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2.$$

$$\text{Stąd } H = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}.$$

Zatem objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{209}}{12}.$$

Schemat punktowania**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.**

Zdający

- zapisze równanie $\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}$

albo

- zapisze, że $|DO| = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $|AO| = \frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający

- obliczy długość krawędzi a podstawy ostrosłupa: $a = 2$ i zapisze równanie z niewiadomą H , np.: $H^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

albo

- obliczy długość krawędzi a podstawy ostrosłupa: $a = 2$ i zapisze układ równań wystarczający do obliczenia wysokości ostrosłupa, np.:
$$\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy objętość V ostrosłupa: $V = \frac{\sqrt{209}}{12}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozważa inną bryłę niż podana w treści zadania, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Akceptujemy poprawne przybliżenia liczb rzeczywistych.
3. Jeżeli zdający poda długość krawędzi podstawy $a = 2$ bez obliczeń i rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie przepisze liczbę $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ lub liczbę $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ i z tym błędem rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeśli zdający nie obliczy a i przyjmuje, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.