

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ 2014/2015

MATEMATYKA POZIOM PODSTAWOWY

ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Odpowiedź	B	D	A	A	B	B	B	C	C	A	C	B	B	A	D	B	D	A	A	B	D	B	A

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1.7. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd względny przybliżenia.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe.

Odpowiedź

D

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia. 1.3. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Odpowiedź

A

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia. 3.3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Odpowiedź

A

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach. 4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw. 4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: 6) wykorzystuje definicję logarytmu. 4) stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Odpowiedź

C

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.7. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. 3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą. 1.8. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

Odpowiedź

C

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.10. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Odpowiedź

A

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 11. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Odpowiedź

C

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.4. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.2. Równania i nierówności. Zdający wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. 4.7. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Odpowiedź

A

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.2. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

Odpowiedź

D

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.2. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu.

Odpowiedź

D

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° .

Odpowiedź

A

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. Zdający: 1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym. 4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Odpowiedź

A

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.2. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	III etap edukacyjny 9.4. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych. IV etap edukacyjny – poziom podstawowy 10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych.

Odpowiedź

D

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	III etap edukacyjny 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający: 3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą). 6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Odpowiedź

A

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź

0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

KLUCZ OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

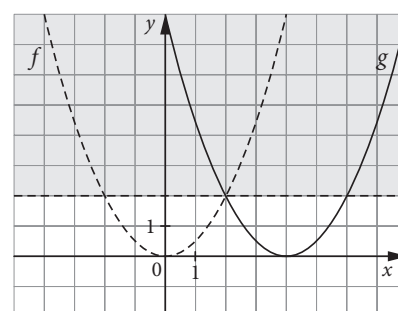
Zadanie 24. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający: 7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru. 3) odczytuje z wykresu własności funkcji. 4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, a następnie przesuwamy go o 4 jednostki w prawo, otrzymując wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$. Z wykresu odczytujemy, że $g(x) > 2$ dla $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$.



II sposób

Z informacji o przesunięciu wnioskujemy, że $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ i zapisujemy nierówność:

$$\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$$

$$(x-4)^2 > 4$$

$$x^2 - 8x + 16 > 4$$

$$x^2 - 8x + 12 > 0$$

$$\Delta = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{8-4}{2} = 2 \text{ lub } x_2 = \frac{8+4}{2} = 6$$

$$x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$$

albo

$$\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$$

$$(x-4)^2 > 4$$

$$x-4 > 2 \text{ lub } x-4 < -2$$

$$x > 6 \text{ lub } x < 2$$

$$x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$$

Schemat oceniania obu sposobów

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy narysuje wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ lub zapisze nierówność $\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy zapisze zbiór rozwiązań: $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$.

Zadanie 25. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.8. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zakładamy, że $x \neq -3$ i stosujemy wzór skróconego mnożenia $\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = 1-x$, skracamy ułamek i otrzymujemy $x-3 = 1-x$, więc $x = 2$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy założy, że $x \neq -3$ i uprości równanie do postaci $x-3 = 1-x$.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wyznaczy rozwiązanie równania: $x = 2$.

Uwaga

Jeżeli zdający uprości równanie bez założenia $x \neq -3$ i wyznaczy rozwiązanie równania: $x = 2$, to otrzymuje **1 punkt**.

II sposób

Zakładamy, że $x \neq -3$ i przekształcamy równanie do postaci $x^2 - 9 = (1-x)(x+3)$, mnożymy wyrażenia w nawiasach i redukujemy wyrazy podobne

$$x^2 - 9 = -x^2 - 2x + 3$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe

$$\Delta = 25, x_1 = -3, x_2 = 2$$

Ponieważ $x_1 = -3$ nie spełnia założenia, rozwiązaniem równania jest $x = 2$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy założy, że $x \neq -3$ i uprości równanie do postaci $2x^2 + 2x - 12 = 0$.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci rozwiązanie $x_1 = -3$ i zapisze odpowiedź $x = 2$.

Uwaga

Jeżeli zdający nie napisze założenia $x \neq -3$ i poda odpowiedź $x_1 = -3, x_2 = 2$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 26. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Przykładowe rozwiązania

I sposób (model klasyczny)

Z reguły mnożenia wyznaczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu 2 czarnych piłeczek. Z reguły mnożenia obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , czyli $|A| = 7 \cdot 6 = 42$. Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy obliczy $|\Omega| = 90$ i $|A| = 42$ lub też $|\Omega| = 45$ i $|A| = 21$ (w doświadczeniu losowym nie jest istotna kolejność losowania).

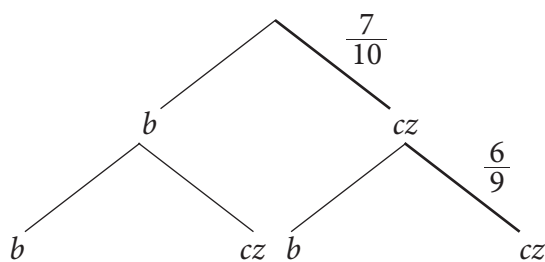
Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający nie skróci ułamka i poda odpowiedź $P(A) = \frac{42}{90}$ lub w innej równoważnej postaci, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia $|\Omega|$ i $|A|$, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli z zapisu rozwiązania nie wynika jasno, że zdający rozróżnia pojęcia przestrzeni zdarzeń elementarnych oraz zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A (np. pojawi się jedynie zapis $10 \cdot 9 = 90$ albo $7 \cdot 6 = 42$ bez żadnego opisu czy powszechnie używanej symboliki), to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający uzyska wynik $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów**.

II sposób (metoda drzewa)

Losowanie z pudełka kolejno 2 piłeczek bez zwracania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie b oznacza wylosowanie białej piłeczki, a cz – czarnej piłeczki. Pogrubiona gałąź drzewa odpowiada zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu 2 czarnych piłeczek.



Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy narysuje drzewo i poprawnie zaznaczy prawdopodobieństwa przynajmniej na odcinkach gałęzi odpowiadających zdarzeniu A .

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

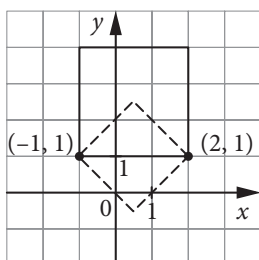
Uwaga

Jeżeli zdający nie narysuje drzewa i zapisze $P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.

Przykładowe rozwiązanie



Zaznaczamy dane punkty w układzie współrzędnych i rysujemy odcinek o końcach w tych punktach. Oznaczamy długość odcinka przez a , wtedy $a = 3$.

Zauważamy, że są dwie możliwości – zaznaczony odcinek może być:

- boki kwadratu – wtedy jego pole jest równe $P = a^2 = 9$,
- przekątną kwadratu – wtedy jego bok wynosi $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ i pole $P = \frac{9}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje **1 pkt**
gdy poprawnie obliczy odległość między danymi punktami oraz pole tylko jednego kwadratu.

Zdający otrzymuje **2 pkt**
gdy poprawnie obliczy pola obu kwadratów.

Zadanie 28. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	1.5. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje podstawowe własności potęg. 3.4. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = (3^9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (27^7) = 3^{18} - 8 \cdot 3^{21}. \text{ Stąd } \Delta = 3^{18}(1 - 8 \cdot 3^3). \text{ Ostatecznie } \Delta = -215 \cdot 3^{18} < 0.$$

Ponieważ $\Delta < 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze wyróżnik funkcji kwadratowej w postaci $\Delta = 3^{18} - 8 \cdot 3^{21}$.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy doprowadzi wyróżnik do postaci $\Delta = -215 \cdot 3^{18}$ i zapisze wniosek: ponieważ $\Delta < 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

II sposób

Ponieważ $a = 2 > 0$, więc parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej f ma ramiona skierowane do góry. Zatem f nie ma miejsc zerowych, gdy druga współrzędna wierzchołka $y_w > 0$.

Obliczamy: $x_w = \frac{3^9}{4}$, $y_w = f(x_w) = 2 \cdot \frac{3^{18}}{16} - \frac{3^{18}}{4} + 27^7 = \frac{3^{18}}{8} - \frac{3^{18}}{4} + 3^{21}$.

Stąd $y_w = 3^{18} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3^3 \right)$. Ostatecznie $y_w = \frac{215}{8} \cdot 3^{18} > 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze drugą współrzędną wierzchołka w postaci $y_w = \frac{3^{18}}{8} - \frac{3^{18}}{4} + 3^{21}$
lub

gdy zauważy, że ramiona paraboli są skierowane do góry oraz zapisze wniosek: aby funkcja nie miała miejsc zerowych, musi być spełniony warunek $y_w > 0$ (ale nie obliczy y_w).

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy $y_w = \frac{215}{8} \cdot 3^{18}$ i zapisze wniosek: ponieważ parabola będąca wykresem funkcji f ma ramiona skierowane do góry i $y_w > 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Zadanie 29. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykładowe rozwiązanie

Zarobki Bartka za każdy dzień pracy tworzą 40-wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 20$ zł i $r = 3$ zł. Wypłata po 8 tygodniach pracy jest równa sumie 40 wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zatem $S_{40} = \frac{2 \cdot 20 + 39 \cdot 3}{2} \cdot 40 = 3140$, więc po 8 tygodniach pracy Bartek otrzyma 3140 zł.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zauważy, że zarobki za kolejne dni pracy tworzą 40-wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 20$ zł i $r = 3$ zł.

Zdający otrzymuje 2 pkt

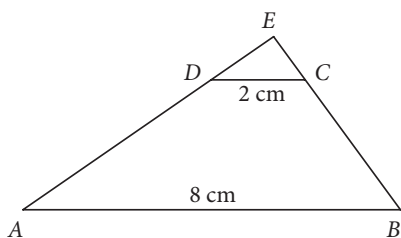
gdy obliczy wartość sumy $S_{40} = 3140$.

Zadanie 30. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.3. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

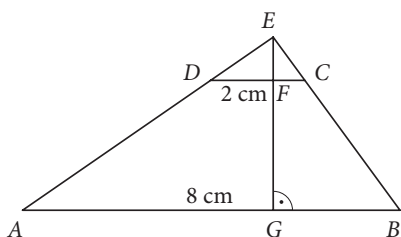
Przykładowe rozwiązania

I sposób



Trójkąt ABE jest podobny do trójkąta DCE w skali $k = \frac{|AB|}{|DC|} = 4$. Z zależności między polami figur podobnych mamy: $P_{ABE} = k^2 \cdot P_{DCE} = 32 \text{ cm}^2$, więc $P_{ABCD} = P_{ABE} - P_{DCE} = 30 \text{ cm}^2$.

II sposób



Trójkąt ABE jest podobny do trójkąta DCE w skali $k = \frac{|AB|}{|DC|} = 4$. Pole trójkąta DCE jest równe 2 cm^2 , więc wysokość $|EF| = 2 \text{ cm}$. Z podobieństwa rozważanych trójkątów otrzymujemy $|EG| = k \cdot |EF| = 8 \text{ cm}$, zatem wysokość FG trapezu $ABCD$ jest równa 6 cm . Stąd $P_{ABCD} = 30 \text{ cm}^2$.

Schemat oceniania obu sposobów

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy stwierdzi, że trójkąt ABE jest podobny do trójkąta DCE w skali $k = 4$.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy pole trapezu $P_{ABCD} = 30 \text{ cm}^2$.

Zadanie 31. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	III etap edukacyjny 7.7. Równania. Zdający za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Przykładowe rozwiązanie

Zaczynamy od uzgodnienia jednostek: prędkość jest w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, więc czas $4 \text{ min} = \frac{1}{15} \text{ h}$. Wprowadzamy oznaczenia:

s – odległość hali od domu,

t – czas pieszej wędrówki do hali,

$t - \frac{1}{15}$ – czas biegu do hali.

Na podstawie wzoru $s = v \cdot t$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} s = 4t \\ s = 6\left(t - \frac{1}{15}\right) \end{cases}$$

$$4t = 6\left(t - \frac{1}{15}\right)$$

$$t = \frac{1}{5} [\text{h}]$$

Zatem odległość hali od domu Janka $s = \frac{4}{5} \text{ km} = 800 \text{ m}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Uzgodnienie jednostek, np. czas w godz. lub prędkość w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ i wprowadzenie oznaczeń, np.:

s – odległość hali od domu,

t – czas pieszej wędrówki do hali,

$t - \frac{1}{15}$ – czas biegu do hali.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań, np.:
$$\begin{cases} s = 4t \\ s = 6\left(t - \frac{1}{15}\right) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.: $4t = 6\left(t - \frac{1}{15}\right)$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie odległości między domem Janka a halą: $s = \frac{4}{5} \text{ km} = 800 \text{ m}$.

Uwaga

Zdający może wprowadzić inne oznaczenia i zapisać równoważny układ równań lub bezpośrednio

zapisać równanie z jedną niewiadomą, np. $\frac{s}{4} - \frac{s}{6} = \frac{4}{60}$.

Zadanie 32. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej). 5) wyznacza współrzędne środka odcinka. 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt. 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

- a) Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB : $a_{AB} = \frac{-4-1}{-2-8} = \frac{1}{2}$ oraz współrzędne środka odcinka AB : $S = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-4+1}{2}\right)$, stąd $S = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$. Prosta będąca osią symetrii trapezu równoramiennego $ABCD$ jest prostopadła do AB i przechodzi przez punkt S , więc $y = -2x + b$, $-\frac{3}{2} = -2 \cdot 3 + b$, stąd $b = \frac{9}{2}$.
Oś symetrii trapezu ma postać $y = -2x + \frac{9}{2}$.

- b) Punkt O będący środkiem podstawy CD tego trapezu jest punktem przecięcia osi symetrii z podstawą CD . Prosta CD jest równoległa do AB i przechodzi przez punkt C , więc $y = \frac{1}{2}x + b$, $4 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, stąd $b = 2$. Prosta CD jest zatem dana równaniem $y = \frac{1}{2}x + 2$.
Współrzędne punktu O obliczymy, rozwiązując układ równań zbudowany z równań prostej CD i osi symetrii trapezu $ABCD$:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + \frac{9}{2} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$, czyli $O = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ jest środkiem podstawy CD .

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a_{AB} = \frac{1}{2}$ lub współrzędnych punktu $S = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$ – środka podstawy AB .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wyznaczenie równania osi symetrii trapezu: $y = -2x + \frac{9}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Wykorzystanie warunku równoległości lub prostopadłości do wyznaczenia równania prostej

zawierającej podstawę CD : $y = \frac{1}{2}x + 2$ i zapisanie układu równań $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + \frac{9}{2} \end{cases}$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania 4 pkt

Rozwiązanie zadania do końca z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu $O = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ – środka podstawy CD trapezu $ABCD$.

II sposób

- b) Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB : $a_{AB} = \frac{-4-1}{-2-8} = \frac{1}{2}$. Prosta CD jest równoległa do AB i przechodzi przez punkt C , więc $y = \frac{1}{2}x + b$, $4 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, stąd $b = 2$. Prosta CD jest więc dana równaniem $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Następnie wyznaczamy współrzędne punktu D . Należy on do prostej CD , więc jego współrzędne można zapisać w postaci $D = \left(d, \frac{1}{2}d + 2\right)$. Trapez $ABCD$ jest równoramienny, zatem zapisujemy równanie: $|AD| = |BC|$.

$$\sqrt{(d+2)^2 + \left(\frac{1}{2}d + 2 + 4\right)^2} = \sqrt{(4-8)^2 + (4-1)^2}$$

Obie strony równania są nieujemne, więc możemy je podnieść do kwadratu:

$$(d+2)^2 + \left(\frac{1}{2}d + 2 + 4\right)^2 = 25$$

Stąd po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$\frac{5}{4}d^2 + 10d + 15 = 0 \quad | \cdot \frac{4}{5}$$

$$d^2 + 8d + 12 = 0$$

$$\Delta = 16, \quad d_1 = -6, \quad d_2 = -2$$

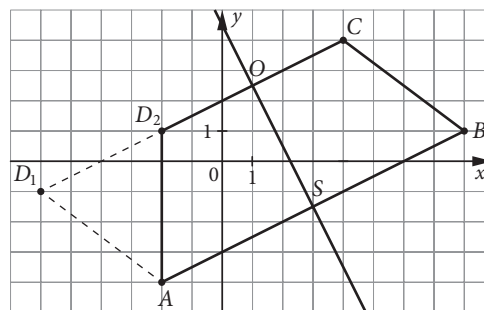
Zatem są dwa takie punkty: $D_1 = (-6, -1)$ oraz $D_2 = (-2, 1)$.

Zauważmy (np. na podstawie rysunku), że D_1 nie spełnia warunków zadania, gdyż $ABCD_1$ jest równoległobokiem.

Ze wzoru na środek odcinka wyznaczamy:

$$S = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-4+1}{2}\right) = \left(3, -\frac{3}{2}\right) - \text{środek podstawy } AB$$

oraz $O = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right) - \text{środek podstawy } CD_2$.



a) Wyznaczamy równanie prostej OS – osi symetrii trapezu $ABCD_2$:

$$a_{OS} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{1 - 3} = -2, \quad \frac{5}{2} = -2 + b, \text{ więc } b = \frac{9}{2}, \text{ czyli równanie prostej } OS:$$

$$y = -2x + \frac{9}{2} - \text{oś symetrii trapezu.}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a_{AB} = \frac{1}{2}$ i wyznaczenie równania prostej CD :
 $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wykorzystanie własności $|AD| = |BC|$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą, np. w postaci

$$\sqrt{(d+2)^2 + \left(\frac{1}{2}d + 2 + 4\right)^2} = 5.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów $D_1 = (-6, -1)$ oraz $D_2 = (-2, 1)$ spełniających warunek

$|AD| = |BC|$ i odrzucenie rozwiązania D_1 .

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają

poprawności rozwiązania 4 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu $O = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ – środka podstawy CD_2 trapezu $ABCD_2$ i poprzestanie na tym lub rozwiązanie do końca z błędami rachunkowymi (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

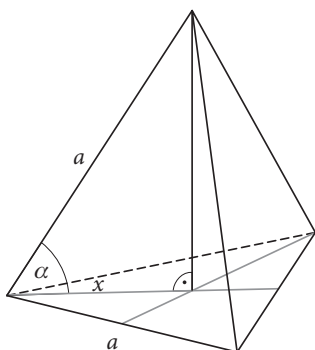
Wyznaczenie równania osi symetrii trapezu: $y = -2x + \frac{9}{2}$.

Zadanie 33. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9.2. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami). 6. Trygonometria. Zdający: 4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$. 1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Korzystamy ze wzorów $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ oraz $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ i przekształcamy wyrażenie:
 $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$. Ponieważ $\cos \alpha = \frac{x}{a}$, więc obliczamy x :
 $x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Stąd $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, zatem wartość wyrażenia
 $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Wyznaczenie długości odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości:

$$x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Przekształcenie wyrażenia $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha$ do postaci $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

Uwaga

Jeśli zdający przekształci wyrażenie do postaci $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ i nie obliczy wartości x , to otrzymuje 1 punkt.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Wyznaczenie $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, zastosowanie jedynki trygonometrycznej i zapisanie wyrażenia w postaci $1 - 2 \cos^2 \alpha$.

lub

Wyznaczenie $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, skorzystanie z jedynki trygonometrycznej i wyznaczenie $\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$.

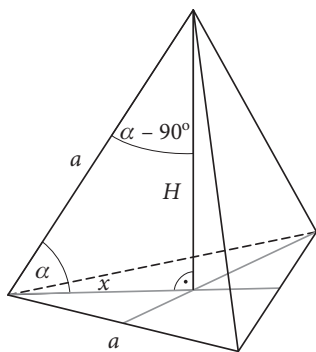
Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie wartości wyrażenia $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

lub

Obliczenie wartości wyrażenia $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

II sposób



Wprowadzamy oznaczenia (np. jak na rysunku). Obliczamy x : $x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz z twierdzenia Pitagorasa H : $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + H^2 = a^2$, stąd $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy: $\cos \alpha = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Zatem wartość wyrażenia $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Wyznaczenie długości odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości:

$$x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i obliczenie wysokości czworościanu: $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznych i wyznaczenie: $\cos \alpha = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie wartości wyrażenia: $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$.