

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**MAJ 2015**

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

### Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                    | Poprawna odp. (1 p.) |           |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej (1.8). | Wersja I             | Wersja II |
|                                                    |                                                                                                                          | C                    | D         |

### Zadanie 2. (0–1)

|                                                    |                                                                                                                                                                                        |          |           |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6). | Wersja I | Wersja II |
|                                                    |                                                                                                                                                                                        | B        | C         |

### Zadanie 3. (0–1)

|                                |                                                                                                     |          |           |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9). | Wersja I | Wersja II |
|                                |                                                                                                     | C        | A         |

### Zadanie 4. (0–1)

|                                                    |                                                                                                              |          |           |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). | Wersja I | Wersja II |
|                                                    |                                                                                                              | B        | C         |

### Zadanie 5. (0–1)

|                                                    |                                                                                                                                          |          |           |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi (3.2). | Wersja I | Wersja II |
|                                                    |                                                                                                                                          | B        | C         |

### Zadanie 6. (0–1)

|                                          |                                                                                                                        |          |           |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7). | Wersja I | Wersja II |
|                                          |                                                                                                                        | C        | D         |

**Zadanie 7. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                              |                 |                  |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$ , $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.8). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                              | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 8. (0–1)**

|                                                    |                                                                  |                 |                  |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (4.3). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                  | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 9. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                |                 |                  |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie (4.6). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                | <b>B</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 10. (0–1)**

|                                          |                                                                                              |                 |                  |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej (4.7). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                          |                                                                                              | <b>C</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 11. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                               |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie (4.9). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                               | <b>A</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 12. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                        |                 |                  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                        | <b>A</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 13. (0–1)**

|                                |                                                                                                                |                 |                  |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                | <b>C</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 14. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                          |                 |                  |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0^\circ$ do $180^\circ$ (6.1). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                          | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 15. (0–1)**

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                 |                 |                  |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 6. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ (6.4). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>A</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 16. (0–1)**

|                                   |                                                                                           |                 |                  |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                   |                                                                                           | <b>C</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 17. (0–1)**

|                                |                                                                                                                                                                                                              |                 |                  |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi (7.4). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                                                                                                              | <b>A</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 18. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                             |                 |                  |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                             | <b>A</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 19. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                             |                 |                  |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                             | <b>A</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 20. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                                      |                 |                  |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka i znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w symetrii środkowej względem początku układu (8.5, 8.7). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                                                      | <b>D</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 21. (0–1)**

|                                          |                                                                                                                 |                 |                  |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastopach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.2). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                          |                                                                                                                 | <b>A</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 22. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                              |                 |                  |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                              | <b>B</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 23. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                              |                 |                  |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                              | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 24. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                             |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (10.1). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                             | <b>D</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 25. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                                |                 |                  |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                                                | <b>B</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 26. (0–2)**Rozwiąż nierówność  $2x^2 - 4x > (x + 3)(x - 2)$ .

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą (3.5).

**Rozwiązanie**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap, wyznaczenie pierwiastków trójmianu, może być realizowany na 2 sposoby:

I sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)Zapisujemy nierówność w postaci  $x^2 - 5x + 6 > 0$  i znajdujemy pierwiastki trójmianu  $x^2 - 5x + 6$ 

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1, \text{ stąd } x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \text{ oraz } x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

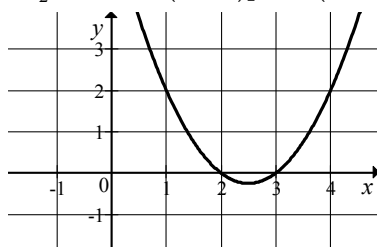
$$x_1 \cdot x_2 = 6 \text{ oraz } x_1 + x_2 = 5, \text{ stąd } x_1 = 2 \text{ oraz } x_2 = 3$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu, lub zaznaczając je na wykresie (wystarczy szkic wykresu, oś liczbowa itp.):

$$x_1 = 2, x_2 = 3 \text{ lub } (x-2)[2x-(x+3)] \text{ lub } (x-2)(x-3)$$

lub

II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego  $x^2 - 5x + 6$  i zapisujemy nierówność w postaci, np.  $(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} > 0$ , a następnie

- przekształcamy nierówność tak, aby jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej

$$\left[ \left( x - \frac{5}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \cdot \left[ \left( x - \frac{5}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] > 0,$$

$$\left( x - \frac{6}{2} \right) \left( x - \frac{4}{2} \right) > 0,$$

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej, korzystając z własności wartości bezwzględnej

$$\left( x - \frac{5}{2} \right)^2 > \frac{1}{4},$$

$$\left|x - \frac{5}{2}\right| > \frac{1}{2}.$$

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ .

### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje.....1 p.**

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np.  $(x-2)(x-3)$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zapisze nierówność  $\left|x - \frac{5}{2}\right| > \frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.:  $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - błędnie zapisze nierówność, np.  $\left|x + \frac{5}{2}\right| < \frac{1}{2}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

**Zdający otrzymuje.....2 p.**

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$  lub  $(x < 2 \text{ lub } x > 3)$ ,

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x < 2$ ,  $x > 3$ ,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

### Uwagi

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez  $x-2$  bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez  $x-2$ , rozważając dwa przypadki  $x-2 > 0$  oraz  $x-2 < 0$ , rozwiąże nierówność w każdym z tych przypadków, ale nie rozważy przypadku  $x-2 = 0$ , to otrzymuje **1 punkt**.

**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

1. Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np.:  $(2, -\infty)$ .
2. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  i zapisze, np.  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 27. (0–2)**

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  i dla dowolnej liczby rzeczywistej  $y$  prawdziwa jest nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$ .

|                                |                                                                                                              |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$  przekształcamy w sposób równoważny

$$y^2 + 4x^2 - 8xy + 4y^2 \geq 0,$$

$$y^2 + (2x - 2y)^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ , gdyż kwadrat każdej liczby jest nieujemny i suma kwadratów liczb nieujemnych również jest nieujemna.

To kończy dowód.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej  $y^2 + (2x - 2y)^2 \geq 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**II sposób rozwiązania**

Nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$  możemy potraktować jak nierówność kwadratową z niewiadomą  $x$  lub – analogicznie – z niewiadomą  $y$ . Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie nierówności jest równy

$$\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (5y^2) = -16y^2 \leq 0.$$

Stąd i z faktu, że współczynnik przy  $x^2$  trójmianu  $f(x) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$  jest dodatni wynika, że trójmian ten przyjmuje tylko wartości nieujemne. To kończy dowód.

**Schemat oceniania II sposobu**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu  $f(x) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$ :  $\Delta = -16y^2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje.....2 p.**

gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu  $f(x) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$ , zapisze, że jest on niedodatni i wyciągnie wniosek, że trójmian przyjmuje tylko wartości nieujemne.

### III sposób rozwiązania

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ . Stąd wynika, że prawdziwa jest nierówność

$$4x^2 + 4y^2 \geq 8xy, \text{ czyli } 4x^2 - 8xy + 4y^2 \geq 0.$$

Zatem, dla dowolnych liczb  $x, y$  mamy

$$4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 4x^2 - 8xy + 4y^2 \geq 0.$$

To kończy dowód.

### Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje.....1 p.**

gdy zapisze, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwe są nierówności  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 4x^2 - 8xy + 4y^2$  oraz  $4x^2 + 4y^2 \geq 8xy$  (lub  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ).

**Zdający otrzymuje.....2 p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

### IV sposób rozwiązania

Gdy co najmniej jedna z liczb  $x, y$  jest równa 0, to nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$  jest prawdziwa, gdyż suma trzech liczb, z których co najmniej dwie są równe 0, a trzecia nieujemna, jest nieujemna.

Gdy liczby  $x, y$  są przeciwnych znaków, to  $xy < 0$ , więc  $-8xy > 0$ . Zatem nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$  jest prawdziwa, gdyż lewa jej strona jest sumą trzech liczb dodatnich.

Pozostaje wykazać prawdziwość nierówności w przypadku, gdy liczby  $x, y$  są tego samego znaku.

Zauważmy najpierw, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność

$$(2x - \sqrt{5}y)^2 \geq 0, \text{ czyli } 4x^2 - 4\sqrt{5}xy + 5y^2 \geq 0.$$

Wykażemy teraz prawdziwość nierówności

$$4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 4x^2 - 4\sqrt{5}xy + 5y^2,$$

równoważnie

$$-8xy \geq -4\sqrt{5}xy,$$

$$xy \leq \frac{\sqrt{5}}{2}xy.$$

Skoro  $x$  i  $y$  są tego samego znaku, to  $xy > 0$ , więc dzieląc obie strony nierówności przez  $xy$ , otrzymujemy nierówność równoważną  $1 \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ , co jest prawdą. To kończy dowód.

### Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje.....1 p.**

gdy wykaże prawdziwość nierówności w przypadku, gdy co najmniej jedna z liczb  $x, y$  jest równa 0 oraz w przypadku, gdy liczby  $x, y$  są przeciwnych znaków, a w przypadku, gdy  $x, y$  są tego samego znaku zauważy, że prawdziwa jest nierówność  $(2x - \sqrt{5}y)^2 \geq 0$ .

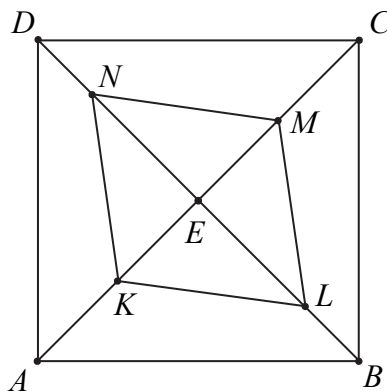
**Zdający otrzymuje .....** **2 p.**  
gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Uwaga**

Gdy zdający sprawdza jedynie prawdziwość nierówności dla konkretnych liczb  $x$  i  $y$ , to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 28. (0–2)**

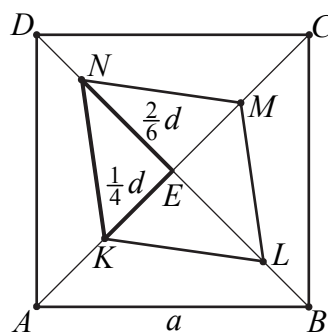
Dany jest kwadrat  $ABCD$ . Przekątne  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $E$ . Punkty  $K$  i  $M$  są środkami odcinków – odpowiednio –  $AE$  i  $EC$ . Punkty  $L$  i  $N$  leżą na przekątnej  $BD$  tak, że  $|BL| = \frac{1}{3}|BE|$  i  $|DN| = \frac{1}{3}|DE|$  (zobacz rysunek). Wykaż, że stosunek pola czworokąta  $KLMN$  do pola kwadratu  $ABCD$  jest równy  $1:3$ .



V. Rozumowanie  
i argumentacja.

G10. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów. (G10.9).

**I sposób rozwiązania**



Przekątne w kwadracie  $ABCD$  są równe, więc  $|AC| = |BD| = d = a\sqrt{2}$ .

Pole kwadratu  $ABCD$  jest równe  $P_{ABCD} = a^2$ . Czworokąt  $KLMN$  składa się z czterech trójkątów prostokątnych przystających do trójkąta  $KEN$ . Pole każdego z nich jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}d\right) \cdot \left(\frac{2}{6}d\right) = \frac{1}{24}d^2 = \frac{1}{24}(a\sqrt{2})^2 = \frac{1}{24} \cdot 2a^2 = \frac{1}{12}a^2.$$

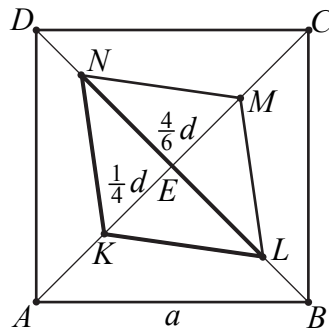
Zatem pole czworokąta  $KLMN$  jest równe

$$P_{KLMN} = 4 \cdot \frac{1}{12} a^2 = \frac{1}{3} a^2.$$

Stąd

$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} a^2}{a^2} = \frac{1}{3}.$$

## II sposób rozwiązania



Przekątne w kwadracie  $ABCD$  są równe, więc  $|AC| = |BD| = d = a\sqrt{2}$ .

Pole kwadratu  $ABCD$  jest równe  $P_{ABCD} = a^2$ . Czworokąt  $KLMN$  składa się z dwóch trójkątów przystających do trójkąta  $KLN$ . Pole każdego z nich jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{6} d\right) \cdot \left(\frac{1}{4} d\right) = \frac{1}{12} d^2 = \frac{1}{12} (a\sqrt{2})^2 = \frac{1}{12} \cdot 2a^2 = \frac{1}{6} a^2.$$

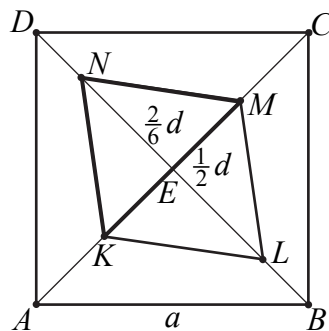
Zatem pole czworokąta  $KLMN$  jest równe

$$P_{KLMN} = 2 \cdot \frac{1}{6} a^2 = \frac{1}{3} a^2.$$

Stąd

$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} a^2}{a^2} = \frac{1}{3}.$$

## III sposób rozwiązania



Przekątne w kwadracie  $ABCD$  są równe, więc  $|AC| = |BD| = d = a\sqrt{2}$ .

Pole kwadratu  $ABCD$  jest równe  $P_{ABCD} = a^2$ . Czworokąt  $KLMN$  składa się z dwóch trójkątów przystających do trójkąta  $KMN$ . Pole każdego z nich jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}d\right) \cdot \left(\frac{2}{6}d\right) = \frac{1}{12}d^2 = \frac{1}{12}(a\sqrt{2})^2 = \frac{1}{12} \cdot 2a^2 = \frac{1}{6}a^2.$$

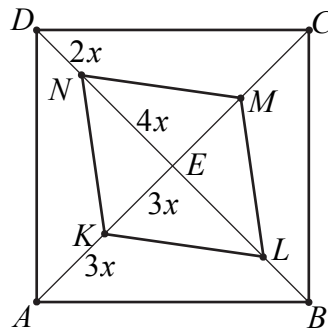
Zatem pole czworokąta  $KLMN$  jest równe

$$P_{KLMN} = 2 \cdot \frac{1}{6}a^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Stąd

$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}a^2}{a^2} = \frac{1}{3}.$$

#### IV sposób rozwiązania



Ponieważ przekątne w kwadracie są równe, więc  $|AE| = |ED|$ . Niech  $|AE| = |ED| = 6x$ .

Wtedy

$$|AK| = |KE| = |EM| = |MC| = 3x, \quad |DN| = |LB| = 2x \quad \text{oraz} \quad |NE| = |EL| = 4x.$$

Stąd

$$|KM| = |KE| + |EM| = 6x \quad \text{oraz} \quad |NL| = |NE| + |EL| = 8x.$$

Pole kwadratu  $ABCD$  jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 12x \cdot 12x = 72x^2.$$

Pole czworokąta  $KLMN$  jest równe

$$P_{KLMN} = \frac{1}{2}|KM| \cdot |NL| = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 8x = 24x^2.$$

Stąd

$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{24x^2}{72x^2} = \frac{1}{3}.$$

### Schemat oceniania

Zdający otrzymuje..... **1 p.**

- gdy wyznaczy pole jednego z trójkątów:  $KLE$ ,  $LME$ ,  $MNE$ ,  $NKE$  ( $P = \frac{1}{12}a^2$ )  
albo
- gdy wyznaczy pole jednego z trójkątów:  $NLM$ ,  $LNK$  ( $P = \frac{1}{6}a^2$ )  
albo
- gdy wyznaczy pole jednego z trójkątów:  $KMN$ ,  $KLM$  ( $P = \frac{1}{6}a^2$ )  
albo
- gdy wyznaczy pole czworokąta  $KLMN$  w zależności od jego przekątnych, np.  
$$P_{KLMN} = \frac{1}{2}|KM| \cdot |LN| = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 8x = 24x^2$$
  
i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje..... **2 p.**

gdy wykaże, że  $\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{1}{3}$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu pola kwadratu i pola czworokąta  $KLMN$  przyjmuje konkretne wartości liczbowe bez stosownego komentarza i rozwiązuje zadanie do końca, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu pól trójkątów lub pól czworokątów o prostopadłych przekątnych pomija współczynnik  $\frac{1}{2}$ , otrzymując poprawny stosunek pola czworokąta  $KLMN$  do pola kwadratu  $ABCD$ , to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający w swoim rozumowaniu wykorzystuje tezę, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 29. (0–2)**

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 - 6x + 3$  w przedziale  $\langle 0, 4 \rangle$ .

|                                                    |                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (4.11). |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli o równaniu  $y = x^2 - 6x + 3$ :  $x_w = \frac{6}{2} = 3$ . Argument  $x_w = 3$  należy do przedziału  $\langle 0, 4 \rangle$ , więc najmniejszą wartością funkcji  $f$  w przedziale  $\langle 0, 4 \rangle$  jest  $f(3) = -6$ . Obliczamy wartości funkcji  $f$  na końcach przedziału  $\langle 0, 4 \rangle$ :

$$f(0) = 3 \text{ oraz } f(4) = -5.$$

Największą wartością jaką przyjmuje funkcja  $f$  w przedziale  $\langle 0, 4 \rangle$  jest  $f(0) = 3$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli  $x_w = 3$  i stwierdzi, że  $x_w \in \langle 0, 4 \rangle$ , albo
- obliczy wartości funkcji  $f$  na końcach przedziału  $\langle 0, 4 \rangle$ :  $f(0) = 3$  oraz  $f(4) = -5$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy zapisze odpowiedź: najmniejsza wartość funkcji  $f$  w przedziale  $\langle 0, 4 \rangle$  jest równa

$$f(3) = -6, \text{ a największa wartość funkcji w tym przedziale jest równa } f(0) = 3.$$

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający obliczy jedynie trzy wartości funkcji:  $f(0) = 3$ ,  $f(3) = -6$  i  $f(4) = -5$  oraz sformułuje odpowiedź: największa wartość funkcji w przedziale  $\langle 0, 4 \rangle$  jest równa 3, a najmniejsza wartość funkcji jest równa  $-6$ , to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy tylko współrzędne wierzchołka paraboli  $x_w = 3$ ,  $f(3) = -6$ , ale nie zapisze, że  $x_w \in \langle 0, 4 \rangle$ , to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 30. (0–2)**

W układzie współrzędnych są dane punkty  $A = (-43, -12)$ ,  $B = (50, 19)$ . Prosta  $AB$  przecina oś  $Ox$  w punkcie  $P$ . Oblicz pierwszą współrzędną punktu  $P$ .

|                                                    |                                                                                                          |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty. (8.1). |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Wyznaczamy równanie prostej  $AB$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \text{ lub } x - 3y + 7 = 0.$$

Pierwsza współrzędna punktu  $P$  jest miejscem zerowym funkcji liniowej określonej wzorem

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Rozwiązujemy zatem równanie

$$\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 0.$$

$$\text{Stąd } x = -7.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy wyznaczy równanie prostej  $AB$ , np. w postaci  $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

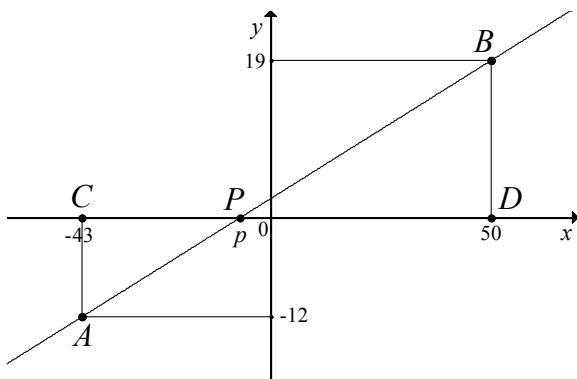
gdy obliczy pierwszą współrzędną punktu  $P$ :  $x = -7$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu równania prostej  $AB$ , popełni błąd rzeczowy, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej  $AB$ , popełniając błędy rachunkowe (np. zapisze  $(19 - 12)(x - 50) - (50 - 43)(y - 19) = 0$ ) i konsekwentnie obliczy pierwszą współrzędną punktu  $P$ , to otrzymuje **1 punkt**.

**II sposób rozwiązania**

Niech  $P = (p, 0)$  będzie punktem przecięcia prostej  $AB$  z osią  $Ox$  układu współrzędnych, a punkty  $C$  i  $D$  będą rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio  $A$  i  $B$  na tę oś.



Wtedy  $C = (-43, 0)$  i  $D = (50, 0)$ . Trójkąty  $PAC$  i  $PBD$  są podobne (oba są prostokątne, a ich kąty ostre przy wierzchołku  $P$  są równe). Zatem

$$\frac{|PD|}{|BD|} = \frac{|PC|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{50-p}{19} = \frac{p-(-43)}{12}.$$

Stąd

$$12(50-p) = 19(p+43),$$

$$600 - 12p = 19p + 817,$$

$$-31p = 217,$$

$$p = -7.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy zapisze równanie, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna punktu  $P$ , np.:

$$\frac{50-p}{19} = \frac{p-(-43)}{12} \text{ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.}$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy obliczy pierwszą współrzędną punktu  $P$ :  $p = -7$ .

**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeżeli zdający obliczy pierwszą współrzędną punktu  $P$ , zapisując np.  $x = -7$ , ale popełni błąd formułując odpowiedź, np.  $P = (7, 0)$ ,  $P = (0, -7)$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 31. (0–2)**

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy  $\frac{4}{7}$ , a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy  $\frac{1}{2}$ . Wyznacz ten ułamek.

|                                |                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | G7. Równania. Zdający za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym, a także rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi (G7.7, G7.6). |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Niech  $x$  i  $y$  oznaczają odpowiednio licznik i mianownik szukanego ułamka nieskracalnego. Z treści zadania otrzymujemy układ równań

$$\frac{x + \frac{1}{2}x}{y + \frac{1}{2}x} = \frac{4}{7} \quad \text{oraz} \quad \frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2},$$

$$7 \cdot \frac{3}{2}x = 4 \left( y + \frac{1}{2}x \right) \quad \text{oraz} \quad 2(x+1) = y+1,$$

$$\frac{21}{2}x = 4y + 2x \quad \text{oraz} \quad 2x + 1 = y.$$

Stąd

$$\frac{17}{2}x = 4(2x+1),$$

$$17x = 16x + 8,$$

$$x = 8, \text{ więc } y = 2 \cdot 8 + 1 = 17.$$

Zatem szukany ułamek to  $\frac{8}{17}$ . Jest to ułamek nieskracalny.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**  
gdy

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:  $\frac{x + \frac{1}{2}x}{y + \frac{1}{2}x} = \frac{4}{7}$  i  $\frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2}$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:  $\frac{17}{2}x = 4(2x+1)$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**

gdy wyznaczy szukany ułamek:  $\frac{8}{17}$ .

**II sposób rozwiązania**

Niech  $x$  i  $y$  oznaczają odpowiednio licznik i mianownik szukanego ułamka nieskracalnego. Z treści zadania otrzymujemy równanie

$$\frac{x + \frac{1}{2}x}{y + \frac{1}{2}x} = \frac{4}{7},$$

$$\frac{\frac{3}{2}x}{y + \frac{1}{2}x} = \frac{4}{7},$$

$$\frac{21}{2}x = 4y + 2x,$$

$$\frac{17}{2}x = 4y.$$

Stąd

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{17}.$$

Otrzymany ułamek jest nieskracalny oraz  $\frac{x+1}{y+1} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ .

Stąd wynika, że  $\frac{8}{17}$  to jedyny szukany ułamek.

#### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze równanie z dwiema niewiadomymi:  $\frac{x + \frac{1}{2}x}{y + \frac{1}{2}x} = \frac{4}{7}$  i doprowadzi je postaci  $\frac{x}{y} = \frac{8}{17}$

i na tym zakończy

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy zapisze równanie z dwiema niewiadomymi:  $\frac{x + \frac{1}{2}x}{y + \frac{1}{2}x} = \frac{4}{7}$ , doprowadzi je postaci  $\frac{x}{y} = \frac{8}{17}$

i sprawdzi, że ułamek ten spełnia drugi z warunków podanych w treści zadania:  $\frac{x+1}{y+1} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ .

#### Uwagi:

1. Jeżeli zdający od razu poda ułamek  $\frac{8}{17}$  i nie sprawdzi, że  $\frac{8+1}{17+1} = \frac{1}{2}$ , to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający od razu poda ułamek  $\frac{8}{17}$  i sprawdzi, że spełnia on drugi z warunków podanych w treści zadania  $\frac{8+1}{17+1} = \frac{1}{2}$ , to otrzymuje **1 punkt**.

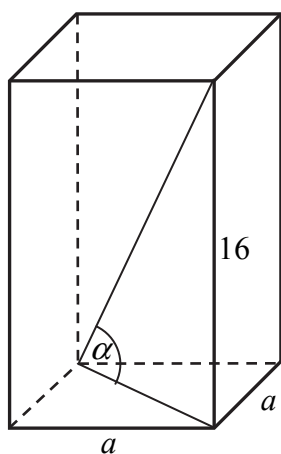
**Zadanie 32. (0–4)**

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy  $\frac{3}{5}$ . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

|                                   |                                                                                                                              |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Niech  $a$  oznacza długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa i niech  $\alpha$  będzie kątem nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy (zobacz rysunek).



Ponieważ  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ , więc kąt  $\alpha$  jest ostry oraz  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Stąd wynika, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ .

Z drugiej strony  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{a\sqrt{2}}$ . Obliczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa.

Rozwiązujemy równanie:

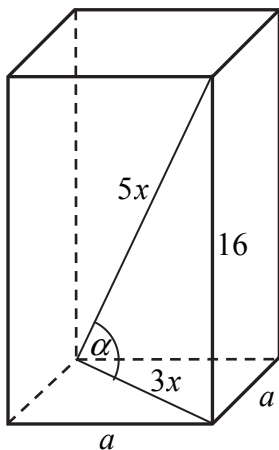
$$\frac{16}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{3}, \text{ skąd } a = 6\sqrt{2}.$$

Szukane pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

$$P_c = 2 \cdot (6\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 = 144 + 384\sqrt{2} = 48(3 + 8\sqrt{2}).$$

**II sposób rozwiązania**

Niech  $a$  oznacza długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa,  $\alpha$  – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy oraz niech przekątna podstawy graniastosłupa ma długość  $3x$ , a przekątna graniastosłupa  $5x$  (zobacz rysunek).



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$$(3x)^2 + 16^2 = (5x)^2,$$

$$9x^2 + 256 = 25x^2,$$

$$256 = 16x^2,$$

$$16 = x^2.$$

Stąd  $x = 4$ . Zatem przekątna podstawy graniastoslupa ma długość  $3x = 3 \cdot 4 = 12$ .

Obliczamy długość krawędzi podstawy graniastoslupa:

$$a\sqrt{2} = 12, \text{ skąd } a = 6\sqrt{2}.$$

Szukane pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa jest równe:

$$P_c = 2 \cdot (6\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 = 144 + 384\sqrt{2} = 48(3 + 8\sqrt{2}).$$

#### Uwaga

Możemy również zauważyć, że trójkąt prostokątny o kącie ostrym  $\alpha$  takim, że  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  jest podobny do trójkąta pitagorejskiego o bokach długości 3, 4 i 5. Skala tego podobieństwa jest równa  $x = \frac{16}{4} = 4$ . W rezultacie szukane pole  $P_c$  powierzchni całkowitej graniastoslupa jest równe  $x^2 P_m$ , gdzie  $P_m$  to pole powierzchni całkowitej graniastoslupa, którego przekątna ma długość 5, a przekątna podstawy długość 3. Długość krawędzi podstawy tego graniastoslupa jest równa  $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ , więc  $P_m = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot 4 = 9 + 24\sqrt{2}$ .

$$\text{Zatem } P_c = 4^2 \cdot P_m = 16(9 + 24\sqrt{2}) = 48(3 + 8\sqrt{2}).$$

#### Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze**

**do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający:

- zapisze, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć skalę  $x$  podobieństwa trójkąta o bokach długości 3, 4 i 5 do trójkąta o przyprostokątnej długości 16 leżącej naprzeciw kąta  $\alpha$ , np.  $(3x)^2 + 16^2 = (5x)^2$

albo

- poda skalę  $x$  podobieństwa trójkąta o bokach długości 3, 4 i 5 do trójkąta o przyprostokątnej długości 16 leżącej naprzeciw kąta  $\alpha$ ,  $x = 4$
- albo
- zaznaczy na rysunku kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy
- albo
- zapisze, że długość  $d$  przekątnej graniastosłupa jest równa 20
- i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 p.**  
 Zdający:

- obliczy długość  $e$  przekątnej podstawy tego graniastosłupa  $e = 12$
- albo
- zapisze równanie, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, np.  $16^2 + (a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{5a\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$$16^2 + (a\sqrt{2})^2 = 20^2 \text{ lub } \frac{16}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$$

albo

- zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, np.

$$\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}}{d} = \frac{3}{5} \\ (a\sqrt{2})^2 + 16^2 = d^2 \end{cases}$$

gdzie  $d$  oznacza długość przekątnej tego graniastosłupa

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 p.**

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa:  $a = 6\sqrt{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne .....4 p.**

Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa:  $P_c = 48(3 + 8\sqrt{2})$ .

#### Uwagi

1. Akceptujemy sytuację, w której zdający wprowadza do rozwiązania poprawne przybliżenia dziesiętne liczb rzeczywistych.
2. Jeżeli zdający przyjmie miarę kąta nachylenia, która nie wynika z treści zadania (np.  $\alpha = 30^\circ$ ), i w rozwiązaniu z tego korzysta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający błędnie zaznaczy na rysunku podany kąt i korzysta z tego kąta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający zapisze, że  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  i korzysta z tej równości, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

5. Jeżeli zdający zapisze błędnie, że  $e = a\sqrt{3}$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

### Zadanie 33. (0–4)

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

| Rodzaj biletów | Liczba osób |
|----------------|-------------|
| ulgowe         | 76          |
| normalne       | 41          |

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

|                                |                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3). |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### I sposób rozwiązania

Oznaczmy:

$A$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która kupiła bilet ulgowy,

$B$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która kupiła bilet normalny,

$C$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego z wymienionych biletów.

Ankietę przeprowadzono wśród 115 osób, zatem  $|\Omega| = 115$ .

Ponieważ wśród badanych występują osoby, które kupiły bilety obu rodzajów, więc

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$\text{Stąd } |A \cup B| = 76 + 41 - 27 = 90.$$

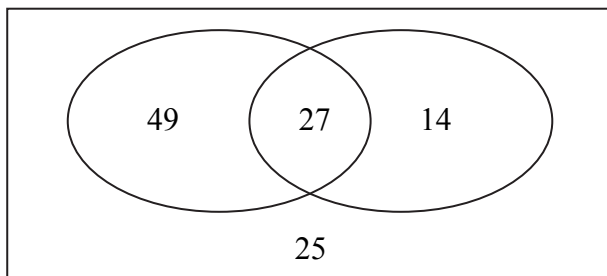
$$\text{Zatem } |C| = |\Omega| - |A \cup B| = 25, \text{ więc}$$

$$P(C) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$$

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe  $\frac{5}{23}$ .

**II sposób rozwiązania**

Oznaczmy:

 $C$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego biletu.Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 115$ .

Liczba wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet jest równa

$$49 + 27 + 14 = 90.$$

Zatem  $|C| = 115 - 90 = 25$ .

$$\text{Stąd } P(C) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}.$$

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe  $\frac{5}{23}$ .

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze****do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 115$

albo

- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety ulgowe: 49

albo

- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety normalne: 14

albo

- obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet: 90.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety ulgowe:  $|\Omega| = 115$ , 49

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły tylko bilety normalne:  $|\Omega| = 115$ , 14

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet:  $|\Omega| = 115$ , 90

albo

- obliczy, ile jest wszystkich osób, które nie kupiły żadnego biletu: 25.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

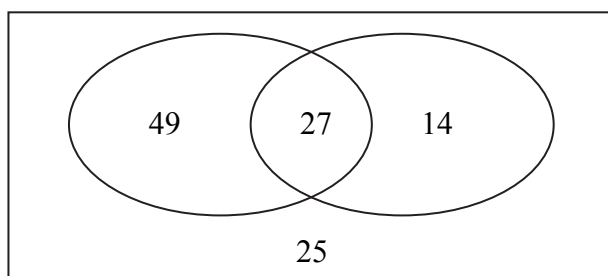
Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy, ile jest wszystkich osób, które nie kupiły żadnego biletu:  $|\Omega| = 115, 25$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która nie kupiła żadnego biletu i zapisze je w postaci ułamka nieskracalnego:  $\frac{5}{23}$ .

### Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(C) > 1$  lub  $P(C) < 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda tylko wynik końcowy  $P(C) = \frac{5}{23}$  lub  $P(C) = \frac{25}{115}$ , to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający obliczy  $P(C) = \frac{25}{115}$  i nie przedstawi wyniku w postaci ułamka nieskracalnego, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu  $|A \cup B|$  lub  $|C|$ , i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający sporządził diagram, na którym zapisał liczby 49, 27, 14 i 25,



i na tym zakończył, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 34. (0–5)**

W nieskończonym ciągu arytmetycznym  $(a_n)$ , określonym dla  $n \geq 1$ , suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_k$  ciągu  $(a_n)$ , w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny  $(b_n)$ . Oblicz  $k$ .

|                                   |                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.3, 5.4). |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Korzystamy ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie:

$$\frac{2a_1 + 10r}{2} \cdot 11 = 187,$$

$$(a_1 + 5r) \cdot 11 = 187,$$

$$a_1 + 5r = 17.$$

Korzystamy z informacji o średniej arytmetycznej trzech wyrazów i zapisujemy równanie:

$$\frac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12,$$

$$\frac{3a_1 + 10r}{3} = 12,$$

$$a_1 + \frac{10}{3}r = 12.$$

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 5r = 17 \\ a_1 + \frac{10}{3}r = 12. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy  $a_1 = 17 - 5r$ .

Otrzymaną wartość  $a_1$  podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z niewiadomą  $r$ :

$$17 - 5r + \frac{10}{3}r = 12,$$

$$r = 3.$$

Obliczamy pierwszy wyraz:  $a_1 = 2$ .

**Uwaga**

W rozwiązaniu układu równań zdający może najpierw wyznaczyć niewiadomą  $r = \frac{17}{5} - \frac{1}{5}a_1$ .

Otrzymaną wartość  $r$  podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z niewiadomą  $a_1$ :

$$a_1 + \frac{10}{3} \left( \frac{17}{5} - \frac{1}{5}a_1 \right) = 12,$$

$$a_1 + \frac{170}{15} - \frac{10}{15}a_1 = 12,$$

$$\frac{1}{3}a_1 = \frac{2}{3},$$

$$a_1 = 2.$$

Dla  $a_1 = 2$  mamy  $r = 3$ .

Wyznaczamy pozostałe wyrazy tworzące ciąg geometryczny:

$$a_3 = a_1 + 2r = 8, \quad a_k = a_1 + (k-1)r = 2 + (k-1) \cdot 3.$$

Kolejne wyrazy  $a_1, a_3, a_k$  ciągu geometrycznego spełniają warunek:  $a_3^2 = a_1 \cdot a_k$ , stąd

$$8^2 = 2 \cdot [2 + (k-1) \cdot 3],$$

$$32 = 3k - 1,$$

$$k = 11.$$

Dla  $k = 11$  wyrazy  $a_1, a_3, a_k$  w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp ..... 1 p.**

Zdający wykorzysta

- wzór na sumę  $n$ -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi  $a_1$  i  $r$ , np.:  $\frac{2a_1 + 10r}{2} \cdot 11 = 187$  lub  $a_1 + 5r = 17$

albo

- średnią arytmetyczną pierwszego, trzeciego oraz dziewiątego wyrazu ciągu ( $a_n$ ) i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi  $a_1$  i  $r$ , np.:

$$\frac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12 \quad \text{lub} \quad a_1 + \frac{10}{3}r = 12$$

albo

- zależność między pierwszym, trzecim i  $k$ -tym wyrazem ciągu ( $a_n$ ) wynikającą z faktu, że ciąg ( $a_1, a_3, a_k$ ) jest geometryczny i zapisze np.:  $a_3^2 = a_1 \cdot a_k$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi  $a_1$  i  $r$ , np.: 
$$\begin{cases} a_1 + 5r = 17 \\ a_1 + \frac{10}{3}r = 12 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający rozwiąże układ równań  $a_1 = 2$  i  $r = 3$  oraz zapisze zależność między pierwszym, trzecim i  $k$ -tym wyrazem ciągu ( $a_n$ ) wynikającą z faktu, że ciąg ( $a_1, a_3, a_k$ ) jest geometryczny, np.:  $a_3^2 = a_1 \cdot a_k$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....4 p.**  
Zdający

- zapisze równanie z niewiadomą  $k$  wynikające z faktu, że ciąg  $(a_1, a_3, a_k)$  jest geometryczny oraz  $a_k$  jest  $k$ -tym wyrazem ciągu arytmetycznego, np.:

$$8^2 = 2(2 + (k-1) \cdot 3)$$

albo

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy  $k$ , o ile otrzymana wartość  $k$  jest całkowita dodatnia.

**Rozwiązanie pełne .....5 p.**  
Zdający obliczy  $k = 11$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający od razu poda  $a_1 = 2$  i  $r = 3$  lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, ..., ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający od razu poda  $a_1 = 2$  i  $r = 3$  lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, ..., ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i wskaże lub obliczy  $k = 11$ , to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający od razu poda  $a_1 = 2$  i  $r = 3$  lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, ..., ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i zapisze równanie z niewiadomą  $k$  i popełni błąd rachunkowy w trakcie jego rozwiązywania, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający od razu przyjmie ciąg arytmetyczny nie spełniający warunków zadania (suma 11 początkowych jego wyrazów jest różna od 187 lub średnia pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu jest różna od 12), to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.