

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
Schemat oceniania

Poziom Podstawowy

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Odpowiedź	A	C	A	A	D	B	A	A	C	A	B	D	D	C	D	C	C	C	C	B	C	A	C

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 24. (2 punkty)

Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 < 0$.

I sposób rozwiązania

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 1 \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = 3 \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = 2 \quad \text{i stąd} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

albo

- zapisujemy nierówność w postaci $(x-1)(x-2) < 0$. Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:
 - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,
 - korzystając z postaci kanonicznej $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$
 - podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi

albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

Podajemy rozwiązanie nierówności: $1 < x < 2$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

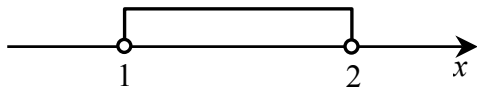
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $(1, 2)$ lub $x \in (1, 2)$ lub $1 < x < 2$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x > 1, \quad x < 2$

albo

- podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



II sposób rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0, \text{ a następnie } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}, \text{ a stąd } \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}, \text{ więc } 1 < x < 2.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy doprowadzi nierówność do postaci $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

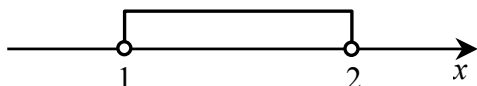
- podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $(1, 2)$ lub $x \in (1, 2)$ lub $1 < x < 2$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x > 1$, $x < 2$

albo

- podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Uwagi

- Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x = 1$, $x = 2$ i zapisze np.: $x \in (-1, 2)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.

- Przyznajemy **1 punkt** zdającemu, który popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego

błędu rozwiąże nierówność, np. zapisze $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-2}$, $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-2}$,

$$x \in \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{-2}, \frac{-3 - \sqrt{17}}{-2} \right).$$

- Przyznajemy **1 punkt** zdającemu, który popełnił jeden błąd przy przepisywaniu nierówności (pisząc np. $x^2 + 3x + 2 < 0$, $x^2 - 3x + 2 > 0$), o ile trójmian z lewej strony nierówności ma dwa różne pierwiastki i zdający rozwiąże konsekwentnie nierówność do końca.

Zadanie 25. (2 punkty)

Udowodnij, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do 16, czyli $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 16$, jest podzielny przez 2^{15} .

I sposób rozwiązania

Wystarczy obliczyć liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $16!$.

Co druga liczba całkowita jest podzielna przez 2, więc mamy 8 dwójek.

Co czwarta liczba całkowita jest podzielna przez 4, więc mamy następne 4 dwójki.

Co ósma liczba całkowita jest podzielna przez 8, więc mamy następne 2 dwójki.

W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $16!$ jest jeszcze 1 dwójka.

Łącznie w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $16!$ mamy $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ dwójek, czyli liczba ta jest podzielna przez 2^{15} .

II sposób rozwiązania

Liczbę $16!$ możemy zapisać w postaci:

$$2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (3 \cdot 2^2) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze $16!$ w postaci $2 \cdot 3 \cdot (2^2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot 15 \cdot (2^4)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy (np. źle zliczy liczbę czynników 2).

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 26. (2 punkty)

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

I sposób rozwiązania

Najpierw obliczamy $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Stąd $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, bo α jest kątem ostrym.

Zatem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ i stąd $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 3 + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{47}{15}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy obliczy $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

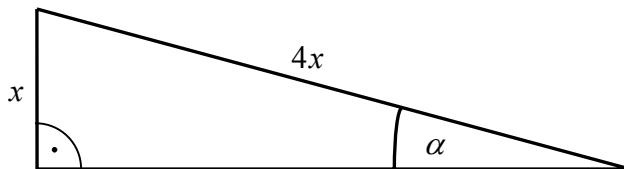
Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ i zapisze wynik w postaci: $3 + 2 \cdot \frac{1}{15}$, $3 \frac{2}{15}$ lub $\frac{47}{15}$.

II sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy przyprostokątną x i przeciwprostokątną $4x$ oraz zaznaczamy kąt ostry α tak, aby $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

Uwaga: Zdający może oznaczyć długości odpowiednich boków liczbami 1 oraz 4.



Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość drugiej przyprostokątnej: $x\sqrt{15}$.

Obliczamy wartości funkcji $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. Stąd $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{47}{15}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy poprawnie wyznaczy długość drugiej przyprostokątnej: $x\sqrt{15}$.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha$ i zapisze wynik w postaci: $3 + 2 \cdot \frac{1}{15}$, $3 \frac{2}{15}$ lub $\frac{47}{15}$.

Uwaga:

Akceptujemy sytuację, w której zdający odczytuje przybliżoną wartość $\operatorname{tg} \alpha$ (na podstawie wartości $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ zdający może przyjąć $\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{tg} 14^\circ \approx 0,2493$ albo $\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{tg} 15^\circ \approx 0,2679$, może również przyjąć przybliżenie z mniejszą dokładnością, ale nie mniejszą niż do jednego miejsca po przecinku) i na tej podstawie obliczyć wartość wyrażenia $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha$ stosując poprawnie regułę zaokrąglania.

Zadanie 27. (2 punkty)

Liczby $2x+1$, 6 , $16x+2$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

I sposób rozwiązania

Z własności ciągu arytmetycznego wynika, że drugi wyraz ciągu jest średnią arytmetyczną wyrazu pierwszego i wyrazu trzeciego. A zatem $\frac{(2x+1)+(16x+2)}{2} = 6$, stąd $x = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze równanie wynikające z własności lub z definicji ciągu arytmetycznego np.:

$$\frac{(2x+1)+(16x+2)}{2} = 6 \quad \text{lub} \quad 6 - (2x+1) = (16x+2) - 6.$$

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy $x = \frac{1}{2}$.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 2x+1+2r=16x+2 \end{cases}$$

Stąd $x = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze układ równań, np.:

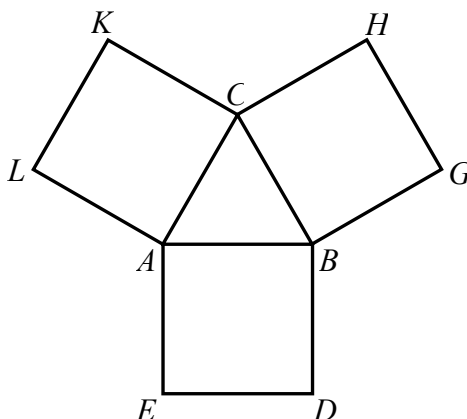
$$\begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 2x+1+2r=16x+2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 6+r=16x+2 \end{cases}.$$

Zdający otrzymuje 2 pkt

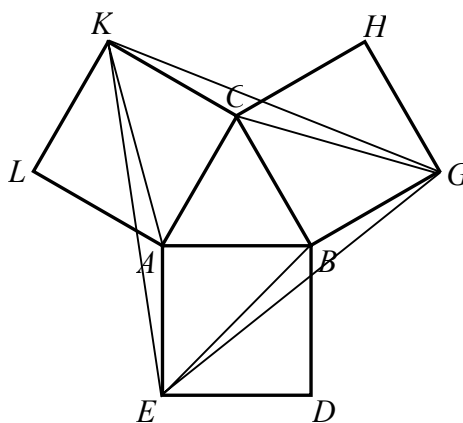
gdy obliczy $x = \frac{1}{2}$.

Zadanie 28. (2 punkty)

Na bokach trójkąta równobocznego ABC (na zewnątrz tego trójkąta) zbudowano kwadraty $ABDE$, $BGHC$ i $ACKL$. Udowodnij, że trójkąt KGE jest równoboczny.



Rozwiązanie:



Rysujemy odcinki KG , CG , GE , BE , KE i KA .

- Odcinki KC , GB i AE są bokami kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta równobocznego, więc $|KC| = |GB| = |AE|$.
- Odcinki CG , BE i AK są przekątnymi tych kwadratów, więc $|CG| = |BE| = |AK|$.
- $|\sphericalangle GCK| = 360^\circ - (|\sphericalangle ACK| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCG|) = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 165^\circ$.
Analogicznie dowodzimy, że $|\sphericalangle GBE| = |\sphericalangle EAK| = 165^\circ$.
- Korzystając z cechy (*bok, kąt, bok*) przystawiania trójkątów stwierdzamy, że trójkąty KCG , GBE i AEK są przystające, więc $|KG| = |GE| = |EK|$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze, że trójkąty KCG , GBE i AEK są przystające i wyciągnie wniosek, że $|KG| = |GE| = |EK|$, lecz nie poda pełnego uzasadnienia równości odpowiednich kątów lub boków.

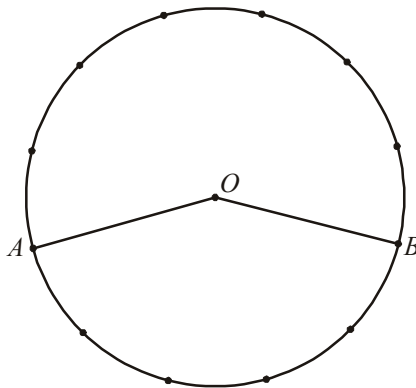
Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 29. (2 punkty)

Punkty A i B leżą na okręgu o środku O i dzielą ten okrąg na dwa łuki, których stosunek długości jest równy 7:5. Jaka jest miara kąta środkowego opartego na krótszym łuku?

Rozwiązanie



Krótszy łuk to $\frac{5}{12}$ okręgu, zatem kąt środkowy oparty na tym łuku to $\frac{5}{12}$ kąta pełnego, tj.

$$\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- zapisze, że krótszy łuk AB to $\frac{5}{12}$ okręgu

lub

- zapisze układ równań, np.: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ i $\alpha + \beta = 360^\circ$

lub

- zapisze, że dwa kolejne punkty zaznaczone na tym okręgu wraz z punktem O wyznaczają kąt środkowy o mierze 30°

lub

- zapisze, że kąt środkowy oparty na dłuższym z łuków AB ma miarę 210°

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy miarę kąta środkowego opartego na krótszym z łuków AB : $|\sphericalangle AOB| = 150^\circ$.

Zadanie 30. (2 punkty)

Dane są dwa pudełka: czerwone i niebieskie. W każdym z tych pudełek znajduje się 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest mniejszy niż numer kuli wylosowanej z niebieskiego pudełka.

I sposób rozwiązania (model klasyczny)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary liczb (a, b) , gdzie $a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Jest to model klasyczny.

$$|\Omega| = 10 \cdot 10$$

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu A są pary liczb, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na miejscu drugim.

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 1, to na drugim miejscu może być każda z liczb od 2 do 10. (Mamy więc 9 możliwości).

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 2, to na drugim miejscu może być każda z liczb od 3 do 10. (Mamy więc 8 możliwości).

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 3, to na drugim może być każda z liczb od 4 do 10. (Mamy więc 7 możliwości). itd.

$$\text{Zatem } |A| = 9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45.$$

$$\text{Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia } A: \quad P(A) = 0,45 = \frac{9}{20}.$$

II sposób rozwiązania (metoda tabeli)

Wszystkie zdarzenia elementarne możemy wypisać w postaci kwadratowej tablicy.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(1,9)	(1,10)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(2,8)	(2,9)	(2,10)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(3,8)	(3,9)	(3,10)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(4,8)	(4,9)	(4,10)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(5,10)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)	(6,9)	(6,10)
(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)	(7,9)	(7,10)
(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)	(8,9)	(8,10)
(9,1)	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,5)	(9,6)	(9,7)	(9,8)	(9,9)	(9,10)
(10,1)	(10,2)	(10,3)	(10,4)	(10,5)	(10,6)	(10,7)	(10,8)	(10,9)	(10,10)

albo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		X	X	X	X	X	X	X	X	X
2			X	X	X	X	X	X	X	X
3				X	X	X	X	X	X	X
4					X	X	X	X	X	X
5						X	X	X	X	X
6							X	X	X	X
7								X	X	X
8									X	X
9										X
10										

Stąd $|\Omega| = 10 \cdot 10$.

Jest to model klasyczny.

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu A są pary liczb, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na miejscu drugim. Są to wszystkie pary liczb wyróżnione w pierwszej tablicy lub zaznaczone w drugiej. Jest ich 45. Zatem $P(A) = 0,45$.

Uwaga:

Wszystkich par w tej tablicy jest 10^2 , na przekątnej łączącej pary $(1,1)$ i $(10,10)$ jest ich 10, więc pozostałych par jest $10^2 - 10$. Nad przekątną jest tyle samo par co pod nią, więc par, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na drugim jest $\frac{10^2 - 10}{2}$.

Zatem $P(A) = 0,45$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy obliczy $|\Omega| = 10 \cdot 10$ albo $|A| = 45$.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = 0,45 = \frac{9}{20}$.

Uwaga:

- Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

Zadanie 31. (5 punktów)

Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Rozwiązanie

Oznaczmy długość boiska w pierwszej szkole przez a i szerokość przez b .

Wówczas w drugiej szkole długość boiska jest równa $a + 4$, szerokość $b - 8$.

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ (a + 4)^2 + (b - 8)^2 = 65^2 \end{cases}$$

Przekształcamy układ do postaci

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a^2 + 8a + 16 + b^2 - 16b + 64 = 65^2 \end{cases}$$

a następnie

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a^2 + b^2 + 8a - 16b + 80 = 65^2 \end{cases}$$

skąd otrzymujemy układ

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ 8a - 16b + 80 = 0 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a = 2b - 10 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczoną wartość a do pierwszego równania i rozwiązujemy równanie

kwadratowe $(2b - 10)^2 + b^2 = 65^2$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy: $b^2 - 8b - 825 = 0$, $\Delta = 3364$, $\sqrt{\Delta} = 58$

Rozwiązaniami tego równania są liczby $b = 33$ oraz $b = -25$. Odrzucamy ujemne rozwiązanie i obliczamy $a = 56$.

Zatem boisko w pierwszej szkole ma 33 m szerokości i 56 metrów długości, a więc boisko w drugiej szkole ma 25 m szerokości i 60 m długości.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

Zapisanie jednego z równań $a^2 + b^2 = 65^2$ lub $(a + 4)^2 + (b - 8)^2 = 65^2$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi a i b , np.:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ (a+4)^2 + (b-8)^2 = 65^2 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą a lub b w postaci: $(2b-10)^2 + b^2 = 65^2$ lub

$$b^2 - 8b - 825 = 0 \text{ lub } a^2 + \left(\frac{1}{2}a + 5\right)^2 = 65^2 \text{ lub } \frac{1}{4}a^2 + a - 840 = 0.$$

Uwaga:

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania zadania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt

- zdający obliczy wymiary boiska w pierwszej szkole i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy wymiary boiska w drugiej szkole

albo

- zdający obliczy wymiary boiska w pierwszej szkole z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy wymiary boiska w drugiej szkole.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie wymiarów boisk w obu szkołach:

Boisko w pierwszej szkole ma 33 m szerokości i 56 metrów długości, natomiast boisko w drugiej szkole ma 25 m szerokości i 60 m długości.

Uwaga:

Jeśli zdający odgadnie poprawne wymiary boisk, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 32. (4 punkty)

Ile jest liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie następujące cztery warunki:

- (1) cyfry setek, dziesiątek i jedności są parzyste,
- (2) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
- (3) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności,
- (4) w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 9.

Rozwiązanie

Trzy ostatnie cyfry są parzyste i uporządkowane malejąco. Mamy więc 10 możliwości ustawienia tych cyfr tak, by spełnione były warunki (1), (2) i (3):

– – 4 2 0
– – 6 2 0
– – 8 2 0
– – 6 4 0
– – 8 4 0
– – 8 6 0
– – 6 4 2
– – 8 4 2
– – 8 6 2
– – 8 6 4

Pierwszą cyfrą liczby może być dowolna spośród cyfr: 1, 2, ..., 8, a drugą dowolna spośród cyfr: 0, 1, 2, ..., 8.

Mamy więc $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ możliwości utworzenia liczb spełniających podane warunki.

Uwaga: Trzy wybrane cyfry parzyste można ustawić w porządku malejącym dokładnie na jeden sposób. Tak więc liczba tych możliwych jest równa $\binom{5}{3} = 10$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy z nich polega na obliczeniu

- liczby możliwości ustawienia trzech cyfr parzystych spełniających warunki (1), (2) i (3); tych możliwości jest 10.
- liczby możliwości wyboru pierwszej cyfry liczby pięciocyfrowej; tych możliwości jest 8.
- liczby możliwości wyboru drugiej cyfry liczby pięciocyfrowej; tych możliwości jest 9.

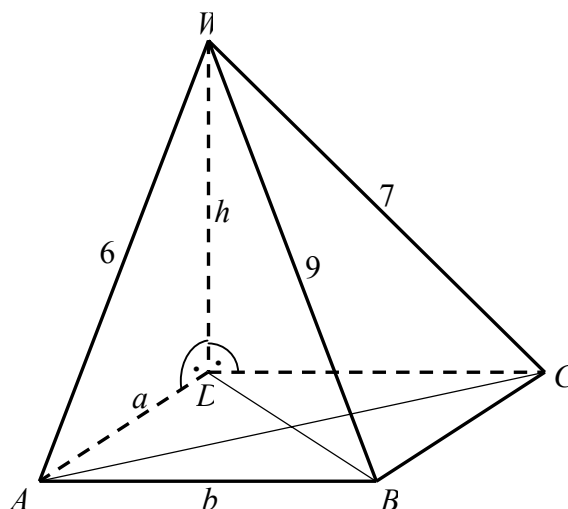
Za obliczenie każdej z tych liczb, zdający otrzymuje 1 punkt.

Drugi etap polega na wykorzystaniu reguły mnożenia i stwierdzeniu, że liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie warunki (1), (2), (3) i (4) jest 720. Za tę część zdający otrzymuje 1 punkt.

Zadanie 33. (4 punkty)

Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne AW , BW i CW mają następujące długości: $|AW| = 6$, $|BW| = 9$, $|CW| = 7$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

I sposób rozwiązania



Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa $|AD| = a$, $|AB| = b$ i $|DW| = h$.

Trójkąty BAW i BCW są prostokątne, więc korzystając dwukrotnie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równania $a^2 + 49 = 81$ i $b^2 + 36 = 81$.

Stąd otrzymujemy $a = 4\sqrt{2}$ oraz $b = 3\sqrt{5}$.

Wysokość ostrosłupa obliczymy korzystając z twierdzenia Pitagorasa np. dla trójkąta ADW .

$$h = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 32} = 2.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Wykorzystanie faktu, że trójkąty BAW i BCW są prostokątne i **zapisanie przynajmniej jednego równania**, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa, np.:

$$a^2 + 49 = 81 \text{ albo } b^2 + 36 = 81.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie długości obu krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 4\sqrt{2}$ i $b = 3\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

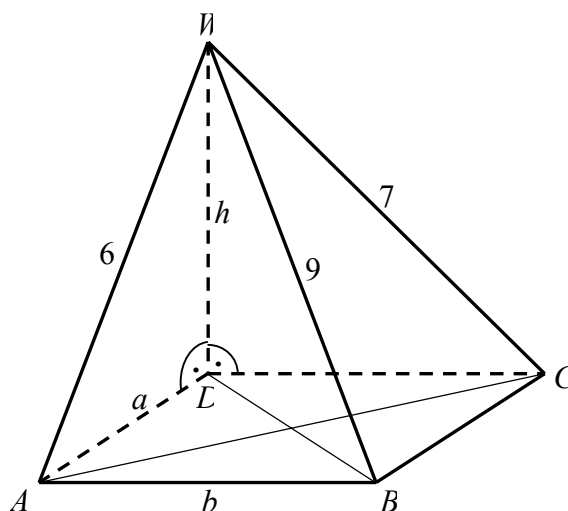
Obliczenie długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa:

$$h = 2, a = 4\sqrt{2}, b = 3\sqrt{5}.$$

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 8\sqrt{10}$.

II sposób rozwiązania



Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa $|AD| = a$, $|AB| = b$ i $|DW| = h$.

Trójkąty ADW , CDW , BDW i BAD są prostokątne, więc korzystając czterokrotnie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 36 \\ b^2 + h^2 = 49 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}$$

Dodajemy pierwsze i drugie równania stronami i podstawiamy $a^2 + b^2 = 85 - 2h^2$ do trzeciego równania. Otrzymamy $h^2 = 4$, więc $h = 2$.

Podstawiając $h = 2$ do pozostałych równań, obliczamy $a = 4\sqrt{2}$ oraz $b = 3\sqrt{5}$.

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zapisanie układu równań, z którego można obliczyć długości wszystkich odcinków

potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa, np.:
$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 36 \\ b^2 + h^2 = 49 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie z powyższego układu jednej z niewiadomych, np.: $h = 2$ albo $a = 4\sqrt{2}$ albo $b = 3\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa:

$$h = 2, a = 4\sqrt{2}, b = 3\sqrt{5}.$$

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 8\sqrt{10}$.

Uwaga:

Jeśli zdający błędnie zaznaczy na rysunku długości krawędzi (zamieni 9 z 6 lub 9 z 7) albo błędnie zinterpretuje treść zadania pisząc np.: $a^2 + 9^2 = 7^2$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.