



Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN GIMNAZJALNY W ROKU SZKOLNYM 2011/2012

CZĘŚĆ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZA MATEMATYKA

KLUCZ ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA ZADAŃ

ARKUSZ GM-M1-122

KWIECIEŃ 2012

Zadania zamknięte

Zasady przyznawania punktów:

- za każdą poprawną odpowiedź – 1 punkt
- za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 punktów

Numer zadania	Poprawna odpowiedź
1.	D
2.	B
3.	B
4.	A
5.	PF
6.	C
7.	D
8.	D
9.	B
10.	PF
11.	A
12.	B
13.	C
14.	A
15.	D
16.	FP
17.	TC
18.	A
19.	C
20.	D

Zadania otwarte

UWAGA

- Za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- Jeśli na jakimkolwiek etapie rozwiązania zadania popełniono jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale zastosowane metody były poprawne, to obniżamy ocenę całego rozwiązania o 1 punkt.

Zadanie 21. (0-4)

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób

x – pojemność dużej doniczki

y – pojemność małej doniczki

$$\begin{cases} 2x + 9y = 6 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$x = 0,75$$

$$y = 0,5$$

$$5x + 4y = 5 \cdot 0,75 + 4 \cdot 0,5 = 3,75 + 2 = 5,75 \text{ (litra)}$$

Wniosek. Wojtkowi wystarczy 6 litrów ziemi do napełnienia doniczek.

Poziom wykonania

P₆ – 4 punkty – pełne rozwiązanie

zapisanie poprawnego wniosku

P₅ – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)

ustalenie sposobu ilości ziemi potrzebnej Wojtkowi do wypełnienia doniczek

P₄ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne
obliczenie pojemności małej doniczki (0,5 litra) i dużej doniczki (0,75 litra)

P₂ – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane
ułożenie poprawnego układu równań opisującego związek między dwiema niewiadomymi (nawet bez oznaczenia niewiadomych użytych w równaniach)

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

II sposób

Biorąc pod uwagę, że doniczki Kasi zawierają tyle samo ziemi co doniczki Asi wnioskujemy, że dwie duże doniczki zawierają tyle samo ziemi, co trzy małe.

x – pojemność dużej doniczki

lub

y – pojemność małej doniczki

$\frac{2}{3}x$ – pojemność małej doniczki

$1,5y$ – pojemność dużej doniczki

$$2x + 9 \cdot \frac{2}{3}x = 6$$

$$2 \cdot 1,5y + 9y = 6$$

$$x = 0,75 \text{ (litra)}$$

$$y = 0,5 \text{ (litra)}$$

$$5x + 4 \cdot \frac{2}{3}x = 5 \cdot 0,75 + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 = 5,75$$

$$5 \cdot 1,5y + 4y = 5 \cdot 1,5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 = 5,75$$

Wniosek. Wojtkowi wystarczy 6 litrów ziemi do napełnienia doniczek.

Poziom wykonania

P₆ – 4 punkty – pełne rozwiązanie

zapisanie poprawnego wniosku

P₅ – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)

ustalenie sposobu ilości ziemi potrzebnej Wojtkowi do wypełnienia doniczek

P₄ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne
ułożenie poprawnego równania z jedną niewiadomą (nawet bez oznaczenia niewiadomej użytej w równaniu)

P₂ – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane
stwierdzenie lub zaznaczenie na rysunku, że dwie duże doniczki zawierają tyle samo ziemi, co trzy małe

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

III sposób

Biorąc pod uwagę, że doniczki Kasi zawierają tyle samo ziemi co doniczki Asi wnioskujemy, że dwie duże doniczki zawierają tyle samo ziemi, co trzy małe.

Stąd duża doniczka ma 1,5 razy większą pojemność niż mała ($V_d = 1,5V_m$).

Zatem 6 litrów ziemi wypełni 12 małych doniczek.

W 5 dużych doniczkach i 4 małych doniczkach Wojtka będzie tyle ziemi, co w 11,5 małych doniczkach.

lub

Stąd pojemność małej doniczki stanowi $\frac{2}{3}$ pojemności dużej ($V_m = \frac{2}{3}V_d$).

Zatem 6 litrów ziemi wypełni 8 dużych doniczek.

Doniczki Wojtka – 5 dużych doniczek i 4 małe – mieszczą tyle ziemi, co $7\frac{2}{3}$ dużej doniczki.

Wniosek. Wojtkowi wystarczy 6 litrów ziemi do napełnienia doniczek.

Poziom wykonania

P₆ – 4 punkty – pełne rozwiązanie

zapisanie poprawnego wniosku

P₅ – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)

przeliczenie pojemności doniczek Wojtka na małe doniczki (11,5 małej doniczki) lub na duże doniczki ($7\frac{2}{3}$ dużej doniczki)

P₄ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne

ustalenie, że pojemność małej doniczki stanowi $\frac{2}{3}$ pojemności dużej lub pojemność dużej to 1,5 pojemności małej doniczki

P₂ – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane

stwierdzenie lub zaznaczenie na rysunku, że dwie duże doniczki zawierają tyle samo ziemi, co trzy małe

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

IV sposób

Biorąc pod uwagę, że doniczki Kasi zawierają tyle samo ziemi co doniczki Asi wnioskujemy, że dwie duże doniczki zawierają tyle samo ziemi, co trzy małe (uczeń może zaznaczyć ten fakt na rysunku). Stąd wynika, że 6 litrów ziemi zmieści się w 8 dużych doniczkach (lub w 12 małych).

Zatem

8 dużych doniczek — 6 litrów

12 małych doniczek — 6 litrów

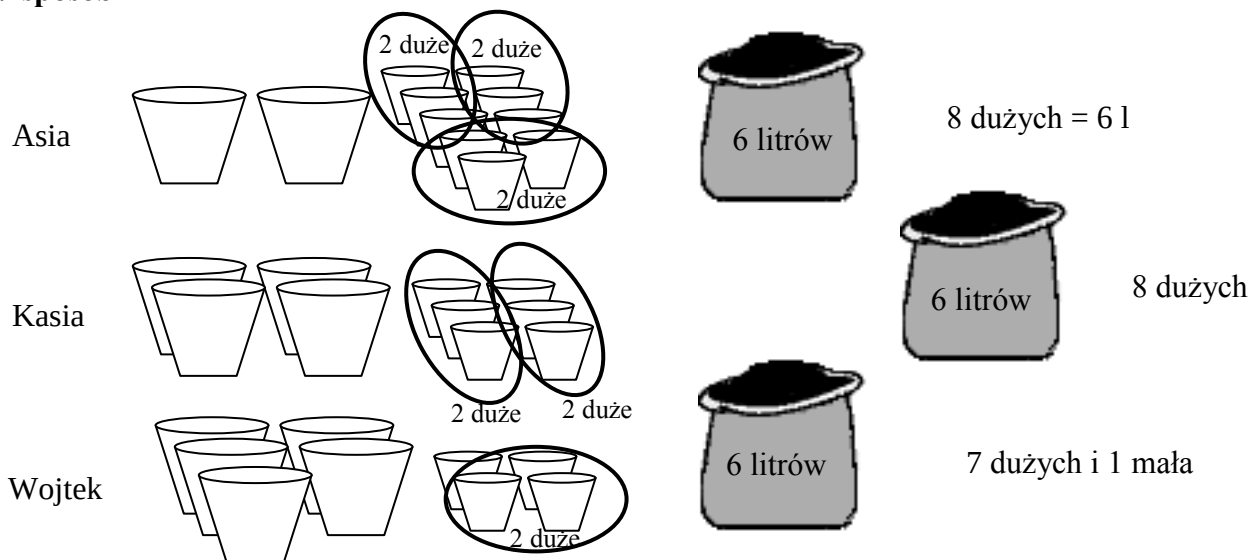
$$1 \text{ duża doniczka} = \frac{6}{8} \text{ l} = \frac{3}{4} \text{ l}$$

$$1 \text{ mała doniczka} = \frac{6}{12} \text{ l} = \frac{1}{2} \text{ l}$$

$$\text{Wojtek ma 5 dużych doniczek i 4 małe doniczki, więc } 5 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5\frac{3}{4}$$

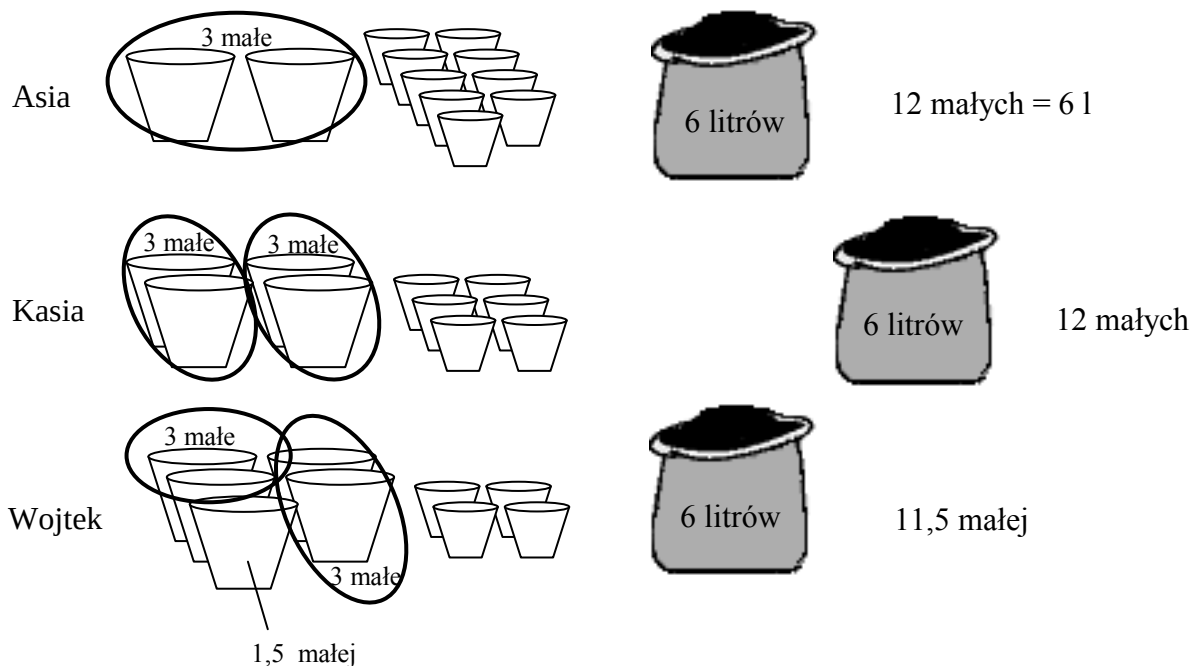
Odpowiedź: Wojtkowi wystarczy 6 litrów ziemi do napełnienia doniczek.

V sposób



Wojtek ma razem 7 dużych doniczek i jedną małą, więc wystarczy mu ziemi do ich napełnienia.

lub



Wojtek ma razem 11,5 małej doniczki, więc wystarczy mu ziemi do ich napełnienia.

Poziom wykonania (sposób IV i V)

P₆ – 4 punkty – pełne rozwiązanie
zapisanie poprawnego wniosku

P₅ – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)
ustalenie sposobu ilości ziemi potrzebnej Wojtkowi do wypełnienia doniczek

P₄ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne
obliczenie pojemności małej doniczki (0,5 litra) i dużej doniczki (0,75 litra)

P₂ – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane
stwierdzenie lub zaznaczenie na rysunku, że dwie duże doniczki zawierają tyle samo ziemi, co trzy małe

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

VI sposób

2 duże doniczki – 3 małe doniczki

1 duża doniczka – 1,5 małej doniczki

Wojtek ma o 1 dużą doniczkę więcej niż Kasia, ale za to o 2 małe doniczki mniej niż Kasia.

Czyli w jego doniczkach zmieści się mniej ziemi niż w doniczkach Kasi.

Odpowiedź: Wojtkowi wystarczy ziemi do napełnienia doniczek.

Poziom wykonania

P₆ – 4 punkty – pełne rozwiązanie
zapisanie poprawnego wniosku

P₅ – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)
sprawdzenie, czy Wojtkowi wystarczy ziemi przez porównanie łącznej pojemności doniczek Wojtka z łączną pojemnością doniczek Kasi (lub Asi)

P₄ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne

ustalenie, że pojemność małej doniczki stanowi $\frac{2}{3}$ pojemności dużej lub pojemność dużej to 1,5 pojemności małej doniczki

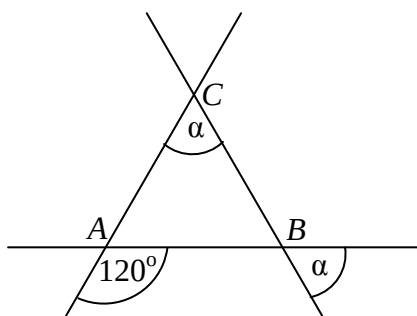
P₂ – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane
stwierdzenie lub zaznaczenie na rysunku, że dwie duże doniczki zawierają tyle samo ziemi, co trzy małe

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 22. (0-2)

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób



Korzystając z własności kątów wierzchołkowych otrzymujemy: $|\sphericalangle ABC| = \alpha$.

Korzystając z własności kątów przyległych otrzymujemy:

$$|\sphericalangle CAB| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Korzystając z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie mamy:

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha + 60^\circ = 180^\circ$$

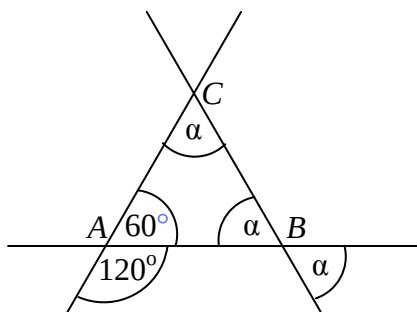
$$2\alpha = 120^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Czyli: $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle BCA| = 60^\circ$

Z tego wynika, że trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.

II sposób



$$\alpha + \alpha + 60^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 120^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.

Poziom wykonania

P₆ – 2 punkty – pełne rozwiązanie

obliczenie, że $\alpha = 60^\circ$

P_{5,4} – 1 punkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.) albo rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne

zapisanie lub zaznaczenie na rysunku, że $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$ i $|\sphericalangle ABC| = \alpha$

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

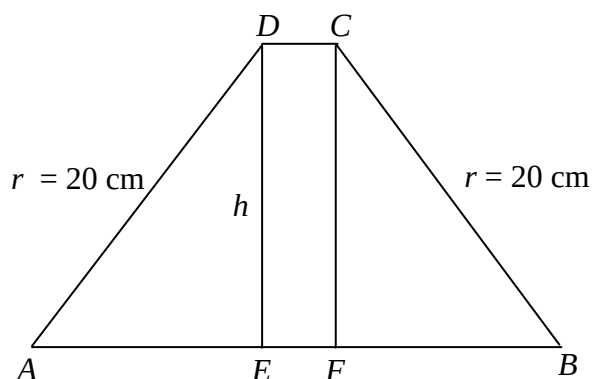
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

np. Trójkąt jest równoboczny, bo wszystkie jego boki mają taką samą długość.

Zadanie 23. (0-4)

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób



Oznaczenia:

$$AB = a$$

$$CD = EF = b$$

$$AE = FB = x$$

$$\begin{cases} a - b = 24 \\ a + b + 2 \cdot 20 = 72 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 24 \\ a + b = 32 \end{cases}$$

$$2a = 56$$

$$a = 28 \text{ (cm)}$$

$$b = 4 \text{ (cm)}$$

Długość odcinka $AE = FB = x$

$$2x = 24$$

$$x = 12 \text{ (cm)}$$

Wysokość h trapezu (z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AED) jest równa:

$$12^2 + h^2 = 20^2$$

$$h^2 = 400 - 144$$

$$h^2 = 256$$

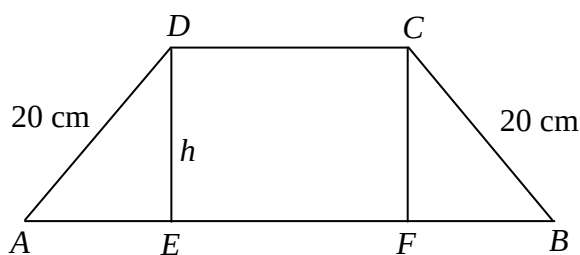
$$h = 16 \text{ (cm)}$$

$$\text{Pole trapezu } P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$P = \frac{28+4}{2} \cdot 16 = \frac{32}{2} \cdot 16 = 256 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Odpowiedź: Pole trapezu jest równe 256 cm^2 .

II sposób



Trapez jest równoramienny, więc $AE = FB = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (cm)

Wysokość h trapezu (z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AED) jest równa:

$$DE^2 = 20^2 - 12^2$$

$$DE^2 = 400 - 144$$

$$DE^2 = 256$$

$$DE = 16 \text{ (cm)}$$

Obwód trapezu jest równy: $72 = 20 + 20 + AB + DC$, zatem $AB + DC = 32$ (cm)

$$\text{Pole trapezu } P = \frac{AB + DC}{2} \cdot DE$$

$$P = \frac{32}{2} \cdot 16 = 256 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Odpowiedź: Pole trapezu jest równe 256 cm^2 .

Poziom wykonania

P₆ – 4 punkty – pełne rozwiązanie

obliczenie pola trapezu (256 cm^2)

P₅ – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)

zapisanie poprawnie sposobu obliczenia pola trapezu

P₂ – 2 punkty – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane

obliczenie wysokości trapezu (16 cm)

P₁ – 1 punkt – dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania

obliczenie długości krótszej podstawy trapezu (4 cm)

lub

obliczenie długości dłuższej podstawy trapezu (28 cm)

lub

obliczenie sumy długości podstaw trapezu (32 cm)

lub

obliczenie długości odcinka AE (12 cm)

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania